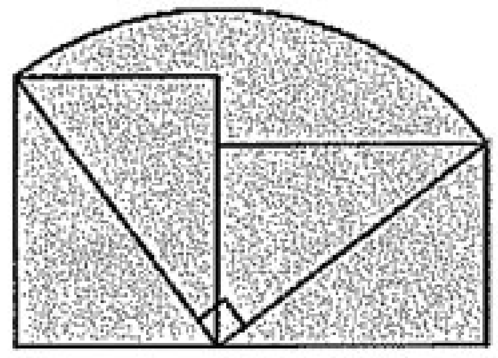
理科第１問

(1)　V は，右図のように,底面の面積が,



(半径 $\sqrt{a^2+c^2}$ の四分円の面積)

$+2\cdot$(直角をはさむ２辺の長さが a と c の直角三角形の面積)

$$=\frac{\pi}{4}(a^2+c^2)+ac$$

であり，高さが b の柱であるから,その体積を v とすると,

$$v=\left\{\frac{\pi}{4}(a^2+c^2)+ac\right\}b \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

である.

(2)　i）まず，$a+b+c=1$ を考えて，b を $0<b<1$ の範囲で固定する.

$a+b+c=1$ のとき，$a+c=1-b$ であるから，①の｛ ｝内は,

$$\frac{\pi}{4}(a^2+c^2)+ac=\frac{\pi}{4}\{(a+c)^2-2ac\}+ac$$

$$=\frac{\pi}{4}(1-b)^2+\left(1-\frac{\pi}{2}\right)ac \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

と表される．そこで ac のとりうる値の範囲を調べる.

$c=1-b-a$ であるから,

$$ac=a(1-b-a)=-a^2+(1-b)a=-\left(a-\frac{1-b}{2}\right)^2+\frac{(1-b)^2}{4} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

と表され，$c>0$ より，a は,

$a>0$ かつ　$1-b-a>0$　　すなわち，$0<a<1-b$　　$\cdots\cdots\cdots$④

の範囲を変化する．よって，③，④より，ac のとりうる値の範囲は,

$$0<ac\leqq\frac{1}{4}(1-b)^2 \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

である．よって，$1-\frac{\pi}{2}<0$ に注意すると，①，②，⑤より，v のとりうる値の範囲は,

$$\frac{\pi+2}{8}b(1-b)^2\leqq v<\frac{\pi}{4}b(1-b)^2 \quad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

である.

ⅱ）次に，b を $0<b<1$ の範囲で変化させる.

$f(b)=b(1-b)^2$ とおくと,

$$f'(b)=(1-b)^2-2b(1-b)$$
$$=(1-b)(1-3b)$$

より，右表を得る.

b	(0)		$\frac{1}{3}$		(1)
$f'(b)$		+	0	−	
$f(b)$		↗		↘	

ここに,

$$f(0)=f(1)=0,\ f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27} \quad \cdots\cdots\cdots ⑦$$

であるから，$f(b)$ の増減と，⑥，⑦より，求める v のとりうる値の範囲は,

$$0<v<\frac{\pi}{27}$$

である.

理 科 第 2 問

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，すべての自然数 k に対して，$k \leqq k+x \leqq k+1$ より，

$$\frac{1-x}{k+1} \leqq \frac{1-x}{k+x} \leqq \frac{1-x}{k}$$

であるから，等号が $x=0$ または $x=1$ のときにのみ成り立つことに注意すると，

$$\frac{1}{k+1}\int_0^1 (1-x)\,dx < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x}\,dx < \frac{1}{k}\int_0^1 (1-x)\,dx$$

である．したがって，

$$\int_0^1 (1-x)\,dx = \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

より

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x}\,dx < \frac{1}{2k} \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．

(2)
$$\int_0^1 \frac{1-x}{k+x}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{k+1}{k+x} - 1\right) dx = \Big[(k+1)\log|k+x| - x\Big]_0^1$$
$$= (k+1)\{\log(k+1) - \log k\} - 1$$

であるから，① より

$$\frac{1}{2(k+1)} < (k+1)\{\log(k+1) - \log k\} - 1 < \frac{1}{2k}$$
$$\therefore \quad \frac{1}{2(k+1)^2} < \log(k+1) - \log k - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2k(k+1)}$$

が成り立ち，さらに，

$$\frac{1}{2(k+1)^2} > \frac{1}{2(k+1)(k+2)}$$

であることを考えれば，

$$\frac{1}{2(k+1)(k+2)} < \log(k+1) - \log k - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2k(k+1)}$$
$$\therefore \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) < \log(k+1) - \log k - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

がすべての自然数 k に対して成り立つ．したがって，$m > n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，

$$\sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) < \sum_{k=n}^{m-1}\left\{\log(k+1) - \log k - \frac{1}{k+1}\right\}$$

$$< \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

すなわち,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right) < \log m - \log n - \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

が成り立つ.

第　3　問

(1)　(i)　$0 \leqq x \leqq 15$ のとき

コインを投げ，表が出れば箱 L のボールの個数は $x+x=2x$ 個になり，裏が出れば箱 L のボールの個数は $x-x=0$ 個になる．

箱 L のボールの個数が 0 個のとき，コインを投げ，表が出ても裏が出ても箱 L のボールの個数は 0 個のままである．

よって，$P_m(x)=\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x)$ が成り立つ．

(ii)　$16 \leqq x \leqq 30$ のとき

コインを投げ，表が出れば箱 L のボールの個数は $x+(30-x)=30$ 個になり，裏が出れば箱 L のボールの個数は $x-(30-x)=2x-30$ 個になる．

箱 L のボールの個数が 30 個のとき，コインを投げ，表が出ても裏が出ても箱 L のボールの個数は 30 個のままである．

よって，$P_m(x)=\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)+\dfrac{1}{2}$ が成り立つ．

以上から，

$$P_m(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x) & (0 \leqq x \leqq 15)\\[2mm] \dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)+\dfrac{1}{2} & (16 \leqq x \leqq 30)\end{cases}$$

(2)　(1)の結果を繰り返し用いると，$n \geqq 2$ のとき，

$$P_{2n}(10)=\frac{1}{2}P_{2n-1}(20)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}P_{2n-2}(10)+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{4}P_{2(n-1)}(10)+\frac{1}{4}$$

これは，$P_{2n}(10)-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}\left\{P_{2(n-1)}(10)-\dfrac{1}{3}\right\}$ と変形できるから，$n \geqq 1$ のとき，

$$P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=\left\{P_2(10)-\frac{1}{3}\right\}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

ここで，

$$P_2(10)=\frac{1}{2}P_1(20)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

であるから，

$$P_{2n}(10)=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right\}$$

(3)　(1)の結果を繰り返し用いると，$n \geqq 2$ のとき，

$$P_{4n}(6)=\frac{1}{2}P_{4n-1}(12)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}P_{4n-2}(24)=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}P_{4n-3}(18)+\frac{1}{2}\right\} \quad \cdots\cdots①$$
$$=\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{2}P_{4n-4}(6)+\frac{1}{2}\right\}+\frac{1}{8}=\frac{1}{16}P_{4(n-1)}(6)+\frac{3}{16}$$

これは，$P_{4n}(6)-\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{16}\left\{P_{4(n-1)}(6)-\dfrac{1}{5}\right\}$と変形できるから，$n\geqq 1$のとき，

$$P_{4n}(6)-\frac{1}{5}=\left\{P_4(6)-\frac{1}{5}\right\}\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}$$

ここで，①より，

$$P_4(6)=\frac{1}{8}P_1(18)+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{3}{16}$$

であるから，

$$P_{4n}(6)=\frac{1}{5}+\left(\frac{3}{16}-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}=\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{n}\right\}$$

第4問

$$C : y = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$$

(1)　$P_i\ (x_i,\ y_i)$ を通る x 軸に平行な直線と、$y = x$ との交点は $H_i(y_i, y_i)$ であるから,

$$\triangle OP_iH_i = \frac{1}{2}|(y_i - x_i)y_i|$$

ここで,

$$\begin{aligned}(y_i - x_i)y_i &= \left(\frac{1}{2}x_i + \sqrt{\frac{1}{4}x_i{}^2 + 2} - x_i\right)\left(\frac{1}{2}x_i + \sqrt{\frac{1}{4}x_i{}^2 + 2}\right) \\ &= \frac{1}{4}x_i{}^2 + 2 - \frac{1}{4}x_i{}^2 \\ &= 2 \ \cdots ①\end{aligned}$$

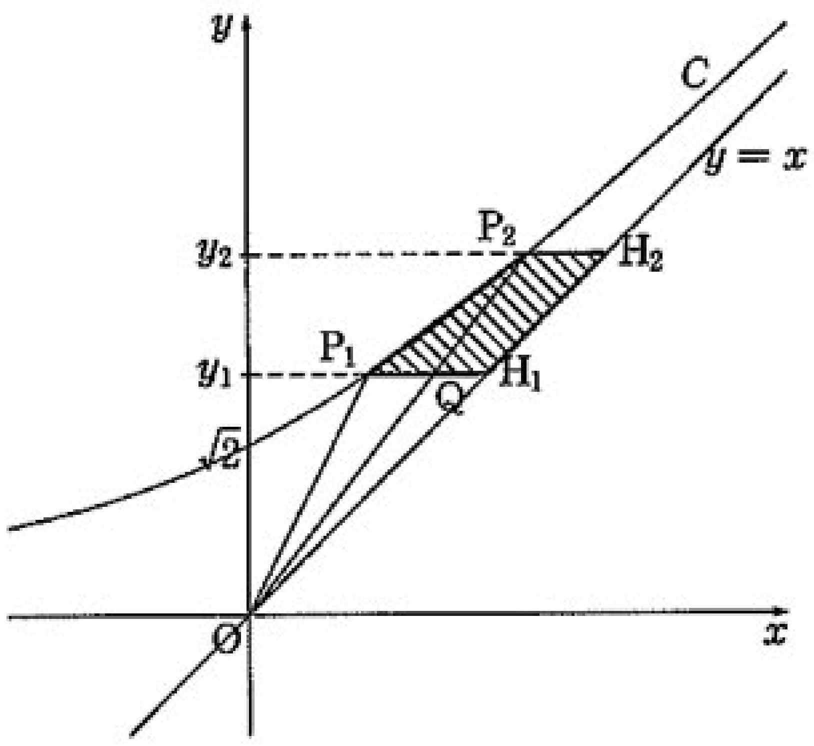
よって, $\triangle OP_iH_i = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$ $(i = 1,\ 2)$ であるから, $\triangle OP_1H_1$ と $\triangle OP_2H_2$ の面積は等しい.

(2) $\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2} > \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}|x| \geqq 0$

よって, C は $y > 0$ を満たす領域にあるから, ① より, 曲線 C の方程式は

$$x = y - \frac{2}{y} \quad (y > 0)$$

である.



OP_2 と P_1H_1 の交点を Q とすると, $\triangle OP_1H_1 = \triangle OP_2H_2$ より, $\triangle OP_1Q$ と四角形 $P_2QH_1H_2$ の面積は等しい.

従って, 求める面積 S は右図の斜線部分の面積に等しく

$$\begin{aligned}S &= \int_{y_1}^{y_2}\left\{y - \left(y - \frac{2}{y}\right)\right\}dy = 2\Big[\log|y|\Big]_{y_1}^{y_2} \\ &= 2(\log y_2 - \log y_1) \\ &= 2\log\frac{y_2}{y_1}\end{aligned}$$

理 科 第 5 問

$\triangle$PQRがPRを斜辺($\angle$PQR $= 90°$)とする直角二等辺三角形であるための条件は

PRが円Cの直径，かつQが弧PRの中点

となることであるから，

$$mt-(-2t)=\pi+2k\pi,\quad t-(-2t)=\frac{\pi}{2}+\ell\pi$$

を満たす整数k, ℓが存在することであり，

$$(m+2)t=(2k+1)\pi \qquad \cdots\cdots ①$$

$$t=\frac{2\ell+1}{6}\pi \qquad \cdots\cdots ②$$

$0 \leqq t \leqq 2\pi$であるから，②において

$$\ell=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \qquad \cdots\cdots ③$$

①と②よりtを消去すると

$$(m+2)\frac{2\ell+1}{6}\pi=(2k+1)\pi$$

$$\therefore\ (m+2)(2\ell+1)=6(2k+1) \qquad \cdots\cdots ④$$

ここで，$2\ell+1$および$2k+1$は奇数であり，6は2で割り切れるが4で割り切れないから，

$m+2$は2で割り切れるが，4で割り切れない整数

であり，$3 \leqq m+2 \leqq 12$より

$m+2=6$ または 10

である。

(i) $m+2=6$ すなわち $m=4$ のとき，④は

$$6(2\ell+1)=6(2k+1) \qquad \therefore\ \ell=k$$

となり，③における任意のℓに対して整数kは存在する。

(ii) $m+2=10$ すなわち $m=8$ のとき，④は

$$5(2\ell+1)=3(2k+1)$$

5と3は互いに素であるから，$2\ell+1$が3で割り切れることが整数kが存在するための条件であり，③においては

$$\ell=1,\ 4$$

に限られる。

以上より，

$$(m,\ \ell)=(4,\ 0),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4),\ (4,\ 5),\ (8,\ 1),\ (8,\ 4)$$

であり，②よりtを求めて

$$(m,\ t)=\left(4,\ \frac{\pi}{6}\right),\ \left(4,\ \frac{\pi}{2}\right),\ \left(4,\ \frac{5}{6}\pi\right),\ \left(4,\ \frac{7}{6}\pi\right),\ \left(4,\ \frac{3}{2}\pi\right),$$

$$\left(4,\ \frac{11}{6}\pi\right),\ \left(8,\ \frac{\pi}{2}\right),\ \left(8,\ \frac{3}{2}\pi\right)$$

6

(1) 四面体OABCの４つの面はすべて合同なので

$$\mathrm{OA}=\mathrm{BC}=3,\ \mathrm{OB}=\mathrm{CA}=\sqrt{7},\ \mathrm{AB}=\mathrm{OC}=2$$

より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2$$
$$\therefore \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2$$
$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=6$$

同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$$

いま，H は平面 OAB 上にあるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad(\alpha,\ \beta\text{は実数})$$

とおくことができ，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp$(平面$L$)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\quad\text{かつ}\quad\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$
$$\therefore \left(\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\quad\text{かつ}\quad\left(\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$
$$\therefore \alpha\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\quad\text{かつ}\quad\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\beta\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$
$$\therefore 9\alpha+6\beta-3=0\quad\text{かつ}\quad 6\alpha+7\beta-1=0$$
$$\therefore \alpha=\frac{5}{9},\ \beta=-\frac{1}{3}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表される。

(2) (1)の結果と$\overrightarrow{\mathrm{OP}_t}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_t}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$であることから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OP}_t}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OQ}_t}$$

と表せるので，点Hが直線$\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$上にあるとき

$$\frac{5}{9t}-\frac{1}{3t}=1\qquad\therefore t=\frac{2}{9}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

また

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|^2=\left|\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$$
$$=\frac{25}{81}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2-\frac{10}{27}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{10}{9}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$=\frac{24}{9}$$

$\therefore |\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

以下，平面Mと直線OCとの交点をC_tとし，$\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\frac{2}{9}}$，$\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_{\frac{2}{9}}$として，(*)を考え場合分けする。

(i)　$0 < t \leqq \dfrac{2}{9}$のとき

四面体OABCの平面Mによる切り口は三角形$\mathrm{C}_t\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$となり，$\triangle \mathrm{C}_t\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$と$\triangle \mathrm{CPQ}$が相似であって，$\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t : \mathrm{PQ} = t : \dfrac{2}{9}$であるから

$$S(t) = \triangle \mathrm{CPQ} \times \left(\frac{t}{\frac{2}{9}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}\mathrm{AB}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{81}{4}t^2$$

$$= \frac{4\sqrt{6}}{27}\times\frac{81}{4}t^2 = 3\sqrt{6}t^2$$

(ii)　$\dfrac{2}{9} < t < 1$のとき

平面Mと線分CA，CBとの交点をそれぞれA_t，B_tとすると，平面Mと辺ABが平行であることより$\mathrm{A}_t\mathrm{B}_t$とABは平行であるから，四角形$\mathrm{A}_t\mathrm{B}_t\mathrm{Q}_t\mathrm{P}_t$は$\mathrm{A}_t\mathrm{B}_t$と$\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$が平行な台形である。直線$\mathrm{P}_t\mathrm{A}_t$と直線$\mathrm{Q}_t\mathrm{B}_t$の交点は$\mathrm{C}_t$であり，$\triangle \mathrm{C}_t\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$，$\triangle \mathrm{C}_t\mathrm{A}_t\mathrm{B}_t$，$\triangle \mathrm{CPQ}$が相似であることより

$$S(t) = \triangle \mathrm{CPQ} \times \left(\frac{t}{\frac{2}{9}}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{\mathrm{A}_t\mathrm{B}_t}{\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t}\right)^2\right\}$$

ここで，

$$\mathrm{CA}_t : \mathrm{CA} = \mathrm{PP}_t : \mathrm{PA} = \left(t - \frac{2}{9}\right) : \left(1 - \frac{2}{9}\right)$$

より

$$\mathrm{A}_t\mathrm{B}_t = \frac{t - \frac{2}{9}}{1 - \frac{2}{9}}\mathrm{AB} = \frac{2(9t-2)}{7}$$

$$\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t = t\cdot\mathrm{AB} = 2t$$

であるから，

$$S(t) = \frac{4\sqrt{6}}{27}\times\frac{81}{4}t^2\left\{1 - \left(\frac{9t-2}{7t}\right)^2\right\} = 3\sqrt{6}t^2\left(1 + \frac{9t-2}{7t}\right)\left(1 - \frac{9t-2}{7t}\right)$$

$$= \frac{12\sqrt{6}}{49}(8t-1)(1-t)$$

以上より

$$S(t) = \begin{cases} 3\sqrt{6}t^2 & \left(0 < t \leqq \dfrac{2}{9}\right) \\ \dfrac{12\sqrt{6}}{49}(8t-1)(1-t) & \left(\dfrac{2}{9} < t < 1\right) \end{cases}$$

(3)　(2)より，$S(t)$は$0 < t \leqq \dfrac{2}{9}$のとき単調に増加し，$\dfrac{2}{9} < t < 1$のとき

$$S(t) = -\frac{96\sqrt{6}}{49}\left(t - \frac{9}{16}\right)^2 + \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

であるから，$t = \dfrac{2}{9}$で連続であることも考え，$S(t)$の最大値は

$$S\left(\frac{9}{16}\right) = \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

理科第6問

［別解］

与えられた四面体の条件より，O(0,0,0)，A(3,0,0)，L が xy 平面であるような xyz 空間座標を設定する．

$\mathrm{B}(u,v,0)$ ［$v>0$］とすると，$\mathrm{OB}=\sqrt{7}$，AB=2より，

$$u^2+v^2=7,\ (u-3)^2+v^2=4,\ v>0$$

より，$\mathrm{B}(2,\sqrt{3},0)$ と定まる．

また，$\mathrm{C}(x,y,z)$ ［$z>0$］とすると，OC=2，$\mathrm{AC}=\sqrt{7}$，BC=3より，

$$x^2+y^2+z^2=4,\ (x-2)^2+(y-\sqrt{3})^2+z^2=9,\ (x-3)^2+y^2+z^2=7$$

より，$\mathrm{C}\left(1,-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ と定まる．

(1) 上の考察より，$\mathrm{H}\left(1,-\dfrac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ である．

そして，4点O，A，B，Hは平面 L 上にあるので，3点O，A，Bが三角形を作ることに注意すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる実数 α,β が存在する．この成分を考えると，

$$1=3\alpha+2\beta,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\beta \qquad \therefore\ \alpha=\frac{5}{9},\ \beta=-\frac{1}{3}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

(2) $\mathrm{P}_t(3t,0,0)$，$\mathrm{Q}_t(2t,\sqrt{3}t,0)$ と表されるので，直線 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$ の方程式は，

$$\sqrt{3}x+y=3\sqrt{3}t$$

であり，これが点Hを通るとき，

$$\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}t,\quad \text{すなわち，}\quad t=\frac{2}{9}$$

であるから，$0<t\leqq\dfrac{2}{9}$ のとき切り口は三角形，$\dfrac{2}{9}<t<1$ のとき切り口は四角形である．

ここで，t によらず $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t=t\cdot\mathrm{AB}=2t$ であることに注意する．

i）$0<t\leqq\dfrac{2}{9}$ のとき，切り口は底辺が $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t=2t$ であり，高さが

$$\frac{t}{\frac{2}{9}}\cdot\mathrm{CH}=\frac{9}{2}t\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=3\sqrt{6}t$$

の三角形であるから，

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot 2t\cdot 3\sqrt{6}t=3\sqrt{6}t^2$$

である．

ⅱ) $\dfrac{2}{9}<t<1$ のとき，切り口の四角形は１組の対辺が辺ABに平行な台形で，下底が

$P_tQ_t=2t$，上底が

$$\frac{t-\frac{2}{9}}{1-\frac{2}{9}}\cdot \mathrm{AB}=\frac{2(9t-2)}{7}$$

であり，高さが，

$$\frac{1-t}{1-\frac{2}{9}}\cdot \mathrm{CH}=\frac{9(1-t)}{7}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{6}}{7}(1-t)$$

であるから，

$$S(t)=\frac{1}{2}\left\{\frac{2(9t-2)}{7}+2t\right\}\frac{6\sqrt{6}}{7}(1-t)=\frac{12\sqrt{6}}{49}(8t-1)(1-t)$$

である．

(3) (2)の結果より，$0<t\leqq\dfrac{2}{9}$ のとき $S(t)$ は増加関数であり，$\dfrac{2}{9}<t<1$ のときは，

$$S(t)=\frac{12\sqrt{6}}{49}\left\{-8\left(t-\frac{9}{16}\right)^2+\frac{49}{32}\right\}$$

と変形できるので，$S(t)$ は $t=\dfrac{2}{9}$ で連続であることも考え，最大値

$$S\left(\frac{9}{16}\right)=\frac{3\sqrt{6}}{8}$$

をとる．