2010年度　東京大学　前期　数学(文系)

第　1　問

D(1, 0) とする．

条件(i)より，$\angle\mathrm{BOD}=\theta$ であり，これと条件(ii)より，$\angle\mathrm{COD}=120^\circ-\theta$ であるから，

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin\theta=3\sin\theta$$

$$\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1\sin(120^\circ-\theta)=\frac{3}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\left(-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\right\}=\frac{3}{4}\sin\theta+\frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta$$

(1)　$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OAC}$ より，$3\sin\theta=\dfrac{3}{4}\sin\theta+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta$

$$\therefore\quad 3\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta\qquad\therefore\quad \tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$0^\circ<\theta<120^\circ$ より，

$$\theta=30^\circ$$

(2)　$S=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OAC}$ とおくと，

$$S=\frac{15}{4}\sin\theta+\frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta=\frac{3}{4}(5\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)$$

ここで，$\cos\alpha=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$，$0^\circ<\alpha<90^\circ$ となる α をとると，

$$S=\frac{3}{4}\cdot 2\sqrt{7}\sin(\theta+\alpha)=\frac{3\sqrt{7}}{2}\sin(\theta+\alpha)$$

$\alpha<\theta+\alpha<120^\circ+\alpha$ であるから，S が最大になるのは，$\theta+\alpha=90^\circ$，すなわち，$\theta=90^\circ-\alpha$ のときであり，

$$S\text{ の最大値は }\frac{3\sqrt{7}}{2}\text{，そのとき }\sin\theta=\cos\alpha=\frac{5}{2\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$$

第　2　問

$$f(x+1)=(x+1)^2+a(x+1)+b=x^2+(a+2)x+a+b+1$$

$$\begin{aligned} c\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)\,dt &= c\left\{3x^2\int_0^1 f'(t)\,dt+4x\int_0^1 tf'(t)\,dt\right\} \\ &= c\left\{3x^2\int_0^1(2t+a)\,dt+4x\int_0^1 t(2t+a)\,dt\right\} \\ &= c\left\{3x^2\Big[t^2+at\Big]_0^1+4x\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{2}at^2\right]_0^1\right\} \\ &= c\left\{3x^2(1+a)+4x\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}a\right)\right\} \\ &= 3(a+1)cx^2+\left(2a+\frac{8}{3}\right)cx \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{cases} 1=3(a+1)c & \cdots\cdots① \\ a+2=\left(2a+\frac{8}{3}\right)c & \cdots\cdots② \\ a+b+1=0 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

を満たす定数a, b, cの組をすべて求めればよい.

①, ②より,

$$2a+\frac{8}{3}=3(a+1)(a+2) \qquad \therefore\quad 9a^2+21a+10=0$$

$$\therefore\quad (3a+2)(3a+5)=0 \qquad \therefore\quad a=-\frac{2}{3},-\frac{5}{3}$$

$a=-\frac{2}{3}$のとき, ③より$b=-\frac{1}{3}$, ①より$c=1$

$a=-\frac{5}{3}$のとき, ③より$b=\frac{2}{3}$, ①より$c=-\frac{1}{2}$

以上から,

$$(a,b,c)=\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right),\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{2}\right)$$

第　3　問

(1)　(ⅰ)　$0 \leqq x \leqq 15$ のとき

コインを投げ，表が出れば箱 L のボールの個数は $x+x=2x$ 個になり，裏が出れば箱 L のボールの個数は $x-x=0$ 個になる．

箱 L のボールの個数が 0 個のとき，コインを投げ，表が出ても裏が出ても箱 L のボールの個数は 0 個のままである．

よって，$P_m(x)=\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x)$ が成り立つ．

(ⅱ)　$16 \leqq x \leqq 30$ のとき

コインを投げ，表が出れば箱 L のボールの個数は $x+(30-x)=30$ 個になり，裏が出れば箱 L のボールの個数は $x-(30-x)=2x-30$ 個になる．

箱 L のボールの個数が 30 個のとき，コインを投げ，表が出ても裏が出ても箱 L のボールの個数は 30 個のままである．

よって，$P_m(x)=\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)+\dfrac{1}{2}$ が成り立つ．

以上から，

$$P_m(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x) & (0 \leqq x \leqq 15)\\[2mm] \dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)+\dfrac{1}{2} & (16 \leqq x \leqq 30)\end{cases}$$

(2)　(1)の結果を繰り返し用いると，$n \geqq 2$ のとき，

$$P_{2n}(10)=\frac{1}{2}P_{2n-1}(20)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}P_{2n-2}(10)+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{4}P_{2(n-1)}(10)+\frac{1}{4}$$

これは，$P_{2n}(10)-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}\left\{P_{2(n-1)}(10)-\dfrac{1}{3}\right\}$ と変形できるから，$n \geqq 1$ のとき，

$$P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=\left\{P_2(10)-\frac{1}{3}\right\}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

ここで，

$$P_2(10)=\frac{1}{2}P_1(20)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

であるから，

$$P_{2n}(10)=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right\}$$

文 科 第 4 問

$\triangle$PQRがPRを斜辺($\angle$PQR $= 90°$)とする直角二等辺三角形であるための条件は

PRが円Cの直径，かつQが弧PRの中点

となることであるから，

$$mt-(-2t)=\pi+2k\pi,\quad t-(-2t)=\frac{\pi}{2}+\ell\pi$$

を満たす整数k, ℓが存在することであり，

$$(m+2)t=(2k+1)\pi \qquad \cdots\cdots ①$$

$$t=\frac{2\ell+1}{6}\pi \qquad \cdots\cdots ②$$

$0 \leqq t \leqq 2\pi$であるから，②において

$$\ell=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \qquad \cdots\cdots ③$$

①と②よりtを消去すると

$$(m+2)\frac{2\ell+1}{6}\pi=(2k+1)\pi$$

$$\therefore\ (m+2)(2\ell+1)=6(2k+1) \qquad \cdots\cdots ④$$

ここで，$2\ell+1$および$2k+1$は奇数であり，6は2で割り切れるが4で割り切れないから，

$m+2$は2で割り切れるが，4で割り切れない整数

であり，$3 \leqq m+2 \leqq 12$より

$m+2=6$ または 10

である。

(i) $m+2=6$ すなわち $m=4$ のとき，④は

$$6(2\ell+1)=6(2k+1) \qquad \therefore\ \ell=k$$

となり，③における任意のℓに対して整数kは存在する。

(ii) $m+2=10$ すなわち $m=8$ のとき，④は

$$5(2\ell+1)=3(2k+1)$$

5と3は互いに素であるから，$2\ell+1$が3で割り切れることが整数kが存在するための条件であり，③においては

$$\ell=1,\ 4$$

に限られる。

以上より，

$$(m,\ \ell)=(4,\ 0),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4),\ (4,\ 5),\ (8,\ 1),\ (8,\ 4)$$

であり，②よりtを求めて

$$(m,\ t)=\left(4,\ \frac{\pi}{6}\right),\ \left(4,\ \frac{\pi}{2}\right),\ \left(4,\ \frac{5}{6}\pi\right),\ \left(4,\ \frac{7}{6}\pi\right),\ \left(4,\ \frac{3}{2}\pi\right),$$

$$\left(4,\ \frac{11}{6}\pi\right),\ \left(8,\ \frac{\pi}{2}\right),\ \left(8,\ \frac{3}{2}\pi\right)$$