第　1　問

A

(A − 1)

$g(x)=x^2-f(x)=x^2-(cx+d)$ とおき，$|g(x)|$ の $[a,b]$ での最大値，すなわち「誤差」を D とおく．D は a, b, c, d の関数である．

次に，$[a,b]$ における $g(x)$ の最大値を M，最小値を m とおくと，D は $M-m$ が最小かつ $\dfrac{M+m}{2}=0$ となるように c, d を決めたとき，D は最小値 $\dfrac{M-m}{2}$ をとる．

ここで，$g(x)$ を平方完成すると，

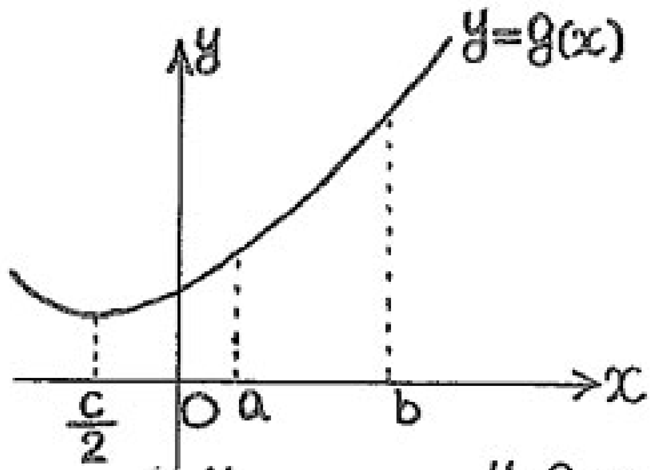
$$g(x)=\left(x-\frac{c}{2}\right)^2-\frac{c^2}{4}-d$$

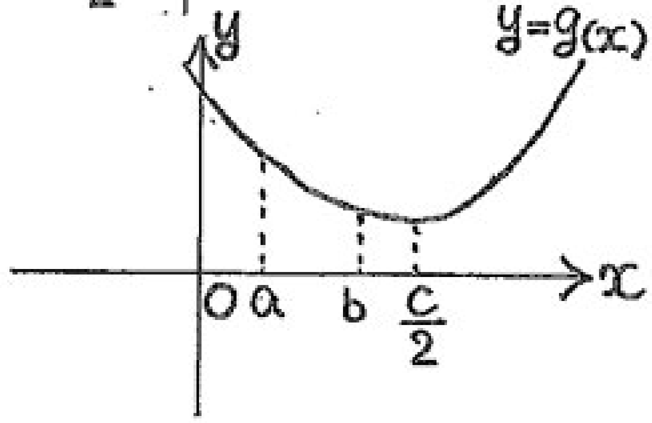
である．まず，c の値で場合分けをして D の値を求める．

(i)　$\dfrac{c}{2}\leqq a$ または $\dfrac{c}{2}\geqq b$ のとき

区間 $[a,b]$ において $g(x)$ は $x=a, b$ のどちらか一方で最大，他方で最小になるから，

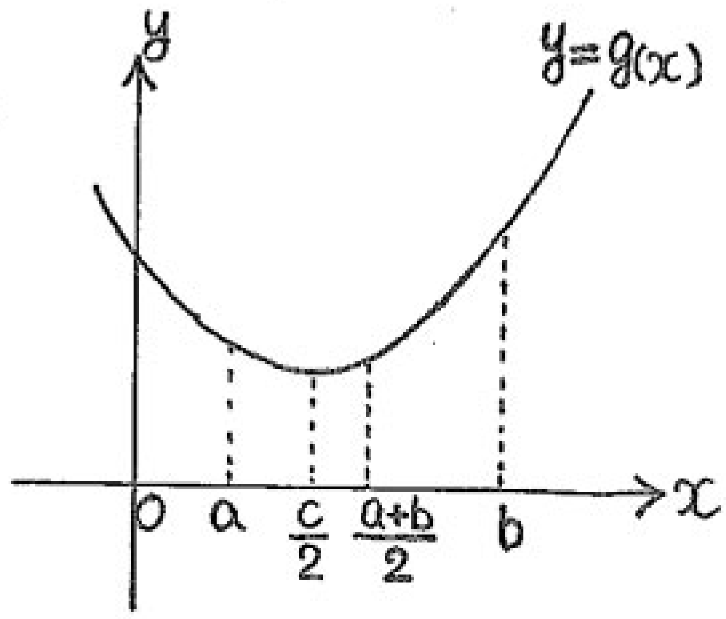
$$\begin{aligned}D&=\frac{1}{2}|g(a)-g(b)|\\&=\frac{1}{2}|\{a^2-(ca+d)\}-\{b^2-(cb+d)\}|\\&=\frac{1}{2}|(a^2-b^2)-c(a-b)|\\&=\frac{1}{2}|(a-b)(a+b-c)|\\&=\frac{1}{2}(b-a)|c-a-b|\end{aligned}$$





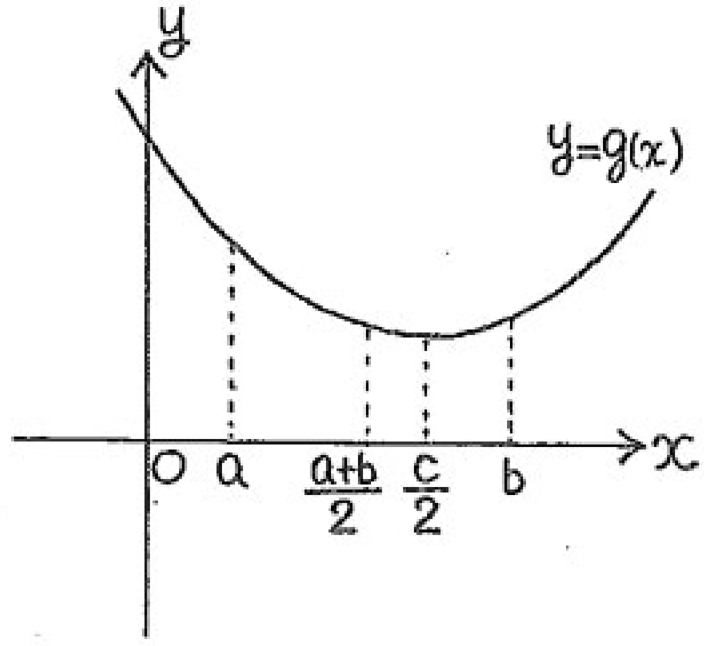
(ii)　$a<\dfrac{c}{2}\leqq\dfrac{a+b}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}D&=\frac{1}{2}\left\{g(b)-g\left(\frac{c}{2}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{(b^2-cb-d)-\left(-\frac{c^2}{4}-d\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(b-\frac{c}{2}\right)^2\\&=\frac{1}{8}(c-2b)^2\end{aligned}$$



(iii) $\dfrac{a+b}{2} < \dfrac{c}{2} < b$ のとき

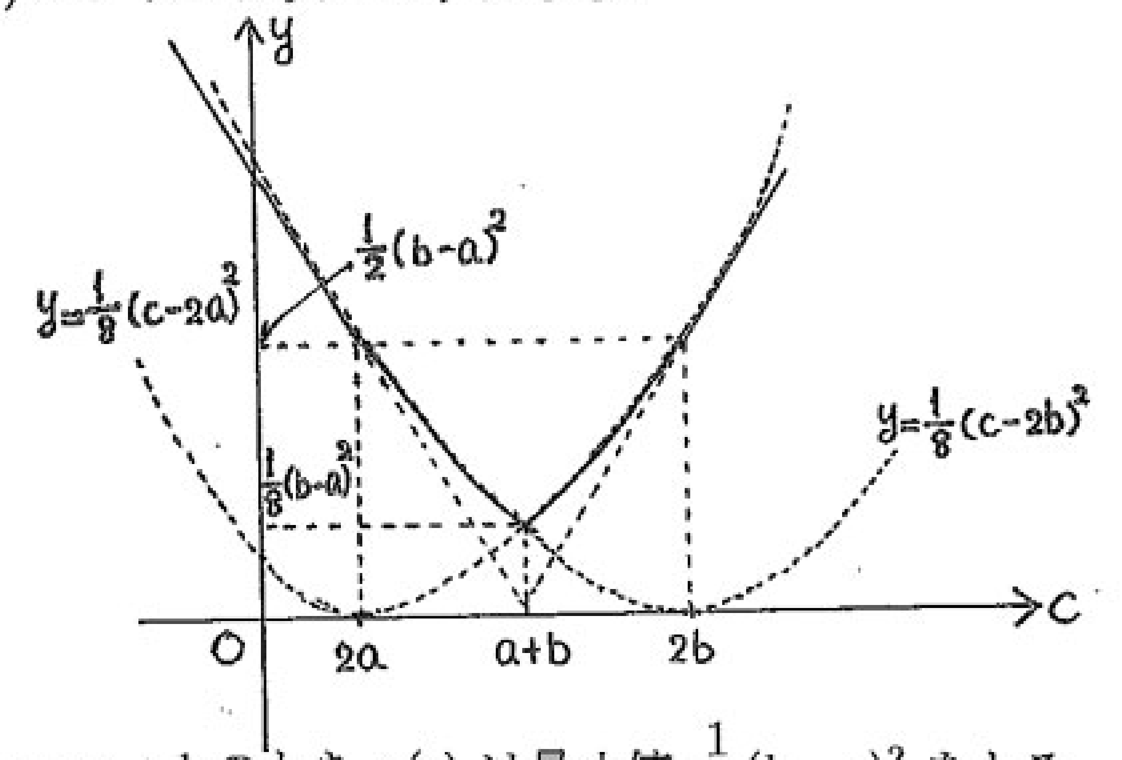
$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}\left\{g(a) - g\left(\frac{c}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{(a^2 - ca - d) - \left(-\frac{c^2}{4} - d\right)\right\} \\ &= \frac{1}{8}(c-2a)^2 \end{aligned}$$



次に, D を c の関数と見てこれを $u(c)$ とおく. $u(c)$ は次のように表せる.

$$u(c) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(b-a)|c-a-b| & (c \leqq 2a \text{ または } c \geqq 2b) \\ \dfrac{1}{8}(c-2b)^2 & (2a < c \leqq a+b) \\ \dfrac{1}{8}(c-2a)^2 & (a+b < c < 2b) \end{cases}$$

$y = u(c)$ のグラフは次のようになる.



図から, $c = a+b$ のとき $u(c)$ は最小値 $\dfrac{1}{8}(b-a)^2$ をとる.

また, このとき $\dfrac{M+m}{2} = 0$ より,

$$g(b) + g\left(\frac{c}{2}\right) = 0$$

$$(b^2 - cb - d) + \left(-\frac{c^2}{4} - d\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad d &= \frac{1}{2}\left(b^2 - cb - \frac{c^2}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{b^2 - (a+b)b - \frac{(a+b)^2}{4}\right\} \\ &= -\frac{1}{8}(a^2 + 6ab + b^2) \end{aligned}$$

である．

以上より，誤差 D を最小にする $f(x)$ は

$$f(x)=(a+b)x-\frac{1}{8}(a^2+6ab+b^2) \quad \cdots\cdots (答)$$

であり，このとき，

$$D=\frac{1}{8}(b-a)^2 \quad \cdots\cdots (答)$$

である．

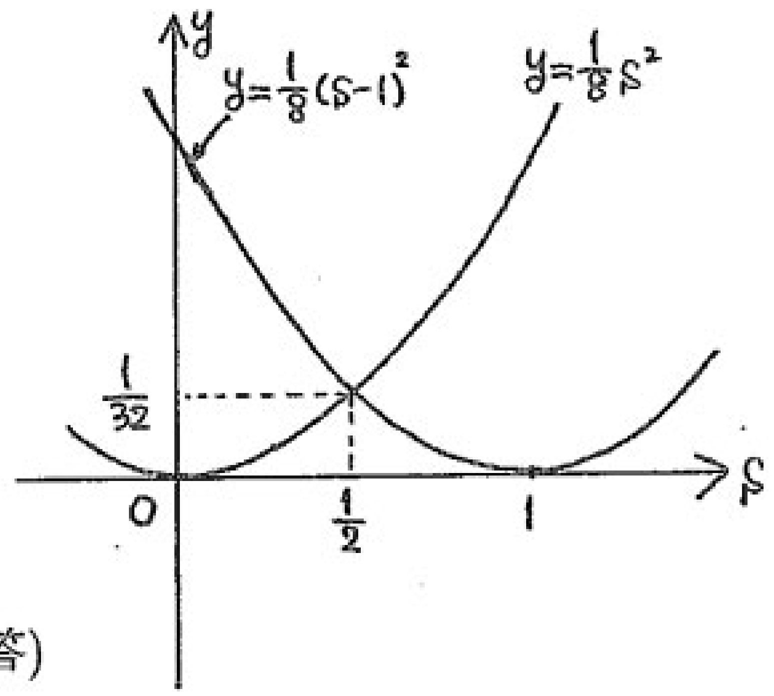
(A − 2)

区間 $[0,s]$ における誤差を D_1, $[s,1]$ における誤差を D_2 とおくと

$$(D_1 \text{ の最小値})=\frac{1}{8}s^2$$

$$(D_2 \text{ の最小値})=\frac{1}{8}(s-1)^2$$

である．したがって，D_1, D_2 の大きい方が最小になる s は右の図より，



$$s=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots (答)$$

である．

(A − 1) の結果を用いると，$f_1(x)$, $f_2(x)$ は，

$a=0,\ b=\dfrac{1}{2}$ より　$f_1(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{32}$ $\cdots\cdots$ (答)

$a=\dfrac{1}{2},\ b=1$ より　$f_2(x)=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{17}{32}$ $\cdots\cdots$ (答)

である．

B

(B-1) $f_{k+N}(t) = h(t)\cos(\alpha(k+N)) = h(t)\cos(\alpha k + \alpha N)$

$f_k(t) = h(t)\cos(\alpha k)$

であるから，条件 (1) を満たすのは，$\alpha N = 2n\pi$(n は整数) のときである．$0 \leqq \alpha < 2\pi$ も考えて，

$$\alpha = \frac{2n\pi}{N}\ (n = 0, 1, 2, \cdots, N-1) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(B-2) 条件 (2) において，

$$\text{左辺} = \frac{d^2}{dt^2}f_k(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2}h(t)\right)\cos(\alpha k)$$

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= M\{g_{k+1}(t) - g_k(t)\} \\
&= M\{(f_{k+1}(t) - f_k(t)) - (f_k(t) - f_{k-1}(t))\} \\
&= M\{f_{k+1}(t) - 2f_k(t) + f_{k-1}(t)\} \\
&= M\{h(t)\cos(\alpha(k+1)) - 2h(t)\cos(\alpha k) + h(t)\cos(\alpha(k-1))\} \\
&= M\{\cos(\alpha(k+1)) - 2\cos(\alpha k) + \cos(\alpha(k-1))\}h(t) \\
&= M\{2\cos(\alpha k)\cos\alpha - 2\cos(\alpha k)\}h(t) \\
&= -4M\cos(\alpha k)\frac{1-\cos\alpha}{2}h(t) \\
&= -4M\cos(\alpha k)\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 h(t)
\end{aligned}$$

であるから，左辺 = 右辺より，

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) = -4M\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 h(t) \qquad (\text{証明終わり})$$

(B-3) $h(t) = \cos(\beta t)$ を (3) に代入して，

$$-\beta^2\cos(\beta t) = -4M\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\cos(\beta t)$$

$$\therefore\quad \beta = \pm 2\sqrt{M}\sin\frac{\alpha}{2}$$

周期 $\dfrac{2\pi}{|\beta|}$ が最も短くなるのは，$|\beta| = 2\sqrt{M}\left|\sin\dfrac{\alpha}{2}\right|$ が最大となるときである．

ここで (B-1) の結果より，$\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{n\pi}{N}$ ($n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$) であるから，これが $\dfrac{\pi}{2}$ に最も近いとき $|\beta|$ は最大となる．以上より，最大となる n は，

N が偶数のとき $n = \dfrac{N}{2}$，N が奇数のとき $n = \dfrac{N \pm 1}{2}$

すなわち，周期を最も短くする α は，

N が偶数のとき $\alpha = \pi$，N が奇数のとき $\alpha = \dfrac{(N \pm 1)\pi}{N}$ $\qquad\cdots\cdots$(答)

第　2　問

A

(A-1) A 氏が x 億円の買い値をつけたとき，B 氏のつけた買い値 y 億円が，$1 \leqq y \leqq x-1$ を満たすとき，A 氏が買うことが出来る．また，$y=x$ をみたすときは，A 氏が確率 $\dfrac{1}{2}$ で買うことが出来る．さらに，$y>x$ を満たすときは，A 氏は買うことが出来ない．y は 1 から 10 までの整数値を等確率でとるので，A 氏が買うことが出来る確率は，

$$\frac{x-1}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2x-1}{20}$$

である．よって，利益の期待値は，

$$(a-x)\frac{2x-1}{20}=-\frac{1}{10}\left(x^2-\frac{2a+1}{2}x+\frac{1}{2}a\right)=-\frac{1}{10}\left(x-\frac{2a+1}{4}\right)^2+(\text{定数})$$

となるから，$\dfrac{2a+1}{4}$ に一番近い整数値で最大となる．すなわち，A 氏の利益の期待値を最大にする買い値は，

a が偶数のとき $\dfrac{a}{2}$ 億円，a が奇数のとき $\dfrac{a+1}{2}$ 億円　　　　　$\cdots\cdots$(答)

(A-2) A 氏が x 億円の買い値をつけたとき，y 億円 $(1 \leqq y \leqq x-1)$ で買える確率は p_y であり，x 億円で買える確率は $\dfrac{1}{2}p_x$ である．よって，利益の期待値を $E(x)$ $(x=1,2,\cdots,10)$ とおくと，$x \geqq 2$ のとき，

$$E(x)=\sum_{y=1}^{x-1}(a-y)p_y+(a-x)\frac{1}{2}p_x$$

であり，$E(1)=(a-1)\dfrac{1}{2}p_1$ である．

これを用いると，$2 \leqq x \leqq 9$ のとき，

$$\begin{aligned}E(x+1)-E(x)&=\left\{\sum_{y=1}^{x}(a-y)p_y+(a-x-1)\frac{1}{2}p_{x+1}\right\}\\&\quad-\left\{\sum_{y=1}^{x-1}(a-y)p_y+(a-x)\frac{1}{2}p_x\right\}\\&=\frac{1}{2}(a-x)p_x+\frac{1}{2}(a-x-1)p_{x+1}\end{aligned}$$

となり，この結果は $x=1$ のときも正しい．これより，

$1 \leqq x \leqq a-1$ のとき $E(x+1)-E(x)>0$

$a \leqq x \leqq 9$ のとき $E(x+1)-E(x)<0$

が得られ，

$$E(1)<E(2)<\cdots<E(a-1)<E(a)>E(a+1)>\cdots>E(10)$$

となるので，A 氏の利益の期待値を最大にする買い値は，

a 億円　　　　　$\cdots\cdots$(答)

B

(B − 1)

ある k, l, m に対して $w_{k,l}>0$ かつ $w_{k,m}<0$ であると仮定する.

これを変更して, 地点 x_i から地点 x_j に輸送する商品の量を $w'_{i,j}$ とし, 変更後の輸送プランにかかる費用を C' と書くことにする.

すなわち,

$$C'=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|w'_{i,j}|d_{i,j}$$

である.

(ア) $|w_{k,l}|\geqq|w_{k,m}|$ のとき

$$w'_{k,l}=|w_{k,l}|-|w_{k,m}|,\ w'_{k,m}=0,\ w'_{m,l}=w_{m,l}+|w_{k,m}|=w_{m,l}-w_{k,m}$$

として, これら以外の商品の輸送量を変更しないとき,

$$\begin{aligned}C-C'&=\frac{1}{2}(|w_{k,l}|-|w'_{k,l}|)d_{k,l}+\frac{1}{2}(|w_{k,m}|-|w'_{k,m}|)d_{k,m}\\&\qquad+\frac{1}{2}(|w_{m,l}|-|w'_{m,l}|)d_{m,l}\\&=\frac{1}{2}|w_{k,m}|d_{k,l}+\frac{1}{2}|w_{k,m}|d_{k,m}+\frac{1}{2}(|w_{m,l}|-|w_{m,l}-w_{k,m}|)d_{m,l}\end{aligned}$$

ここで, $|w_{m,l}-w_{k,m}|\leqq|w_{m,l}|+|w_{k,m}|$ であるから,

$$|w_{m,l}|-|w_{m,l}-w_{k,m}|\geqq-|w_{k,m}|$$

よって,

$$C-C'\geqq\frac{1}{2}|w_{k,m}|(d_{k,l}+d_{k,m}-d_{m,l})>0$$

である.

したがって, $C>C'$ となるから, 元の輸送プランよりも良い輸送プランが存在する.

(イ) $|w_{k,l}|<|w_{k,m}|$ のとき

$$w'_{k,l}=0,\ w'_{k,m}=w_{k,m}+w_{k,l},\ w'_{m,l}=w_{m,l}+w_{k,l}$$

として, これら以外の商品の輸送量を変更しないとき,

$$\begin{aligned}C-C'&=\frac{1}{2}(|w_{k,l}|-|w'_{k,l}|)d_{k,l}+\frac{1}{2}(|w_{k,m}|-|w_{k,m}+w_{k,l}|)d_{k,m}\\&\qquad+\frac{1}{2}(|w_{m,l}|-|w'_{m,l}|)d_{m,l}\\&=\frac{1}{2}|w_{k,l}|d_{k,l}+\frac{1}{2}(|w_{k,m}|-|w_{k,m}+w_{k,l}|)d_{k,m}\\&\qquad+\frac{1}{2}(|w_{m,l}|-|w'_{m,l}+w_{k,l}|)d_{m,l}\end{aligned}$$

ここで, $w_{k,m}+w_{k,l}<0$, $|w_{m,l}+w_{k,l}|\leqq|w_{m,l}|+|w_{k,l}|$ であるから

$$|w_{m,l}| - |w_{m,l} + w_{k,l}| \geqq -|w_{k,l}|$$

よって,

$$\begin{aligned} C - C' &\geqq \frac{1}{2}w_{k,l}d_{k,l} + \frac{1}{2}w_{k,l}d_{k,m} - \frac{1}{2}w_{k,l}d_{m,l} \\ &= \frac{1}{2}w_{k,l}(d_{k,l} + d_{k,m} - d_{m,l}) > 0 \end{aligned}$$

である.

したがって, $C > C'$ となるから, 元の輸送プランよりも良いプランが存在する.

(ア), (イ) より

(i) $w_{i,j} \leqq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ あるいは (ii) $w_{i,j} \geqq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$

のどちらかが成立しなければ, より良い輸送プランが存在する.

(B − 2)

(1) から

$$\sum_{i=1}^{6} w_{i,j} = q_j - p_j \qquad \cdots\cdots ①$$

であり, (B − 1) と合わせると,

$$\begin{aligned} &q_j - p_j > 0 \text{ ならば } w_{i,j} \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, 6) \\ &q_j - p_j < 0 \text{ ならば } w_{i,j} \leqq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, 6) \\ &q_j - p_j = 0 \text{ ならば } w_{i,j} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, 6) \end{aligned}$$

であるから, $i = 1, 2, \cdots, 6$ に対して,

$$w_{i,1} \leqq 0,\ w_{i,2} \leqq 0,\ w_{i,3} \geqq 0,\ w_{i,4} \geqq 0,\ w_{i,5} \geqq 0,\ w_{i,6} = 0$$

である.

また, $w_{i,j} = -w_{j,i}$ であることと合わせると

$$\begin{aligned} &w_{1,1} = w_{1,2} = w_{1,6} = 0,\ w_{2,1} = w_{2,2} = w_{2,6} = 0, \\ &w_{3,3} = w_{3,4} = w_{3,5} = w_{3,6} = 0 \\ &w_{4,3} = w_{4,4} = w_{4,5} = w_{4,6} = 0,\ w_{5,3} = w_{5,4} = w_{5,5} = w_{5,6} = 0 \\ &w_{6,1} = w_{6,2} = w_{6,3} = w_{6,5} = w_{6,6} = 0 \end{aligned}$$

である.

よって, ① より

$$w_{3,1} + w_{4,1} + w_{5,1} = -\frac{1}{9} \qquad \cdots\cdots ②$$

$$w_{3,2} + w_{4,2} + w_{5,2} = -\frac{1}{9} \qquad \cdots\cdots ③$$

$$w_{1,3} + w_{2,3} = \frac{1}{18} \qquad \cdots\cdots ④$$

$$w_{1,4}+w_{2,4}=\frac{1}{18} \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$w_{1,5}+w_{2,5}=\frac{1}{9} \quad \cdots\cdots ⑥$$

$$\begin{aligned}
C&=\frac{1}{2}(\sqrt{3}w_{1,3}+2w_{1,4}+\sqrt{3}w_{1,5}+w_{2,3}+\sqrt{3}w_{2,4}+2w_{2,5}-\sqrt{3}w_{3,1}\\
&\qquad -w_{3,2}-2w_{4,1}-\sqrt{3}w_{4,2}-\sqrt{3}w_{5,1}-2w_{5,2}\\
&=\sqrt{3}w_{1,3}+2w_{1,4}+\sqrt{3}w_{1,5}+w_{2,3}+\sqrt{3}w_{2,4}+2w_{2,5}\\
&=\sqrt{3}w_{1,3}+2w_{1,4}+\sqrt{3}w_{1,5}+\left(\frac{1}{18}-w_{1,3}\right)\\
&\qquad +\sqrt{3}\left(\frac{1}{18}-w_{1,4}\right)+2\left(\frac{1}{9}-w_{1,5}\right)\\
&=(\sqrt{3}-1)w_{1,3}+(2-\sqrt{3})w_{1,4}+(\sqrt{3}-2)w_{1,5}+\frac{5+\sqrt{3}}{18}\\
&\qquad (\text{② より } w_{1,3}+w_{1,4}+w_{1,5}=\frac{1}{9} \text{ であるから})\\
&=(\sqrt{3}-1)w_{1,3}+(2-\sqrt{3})w_{1,4}+(\sqrt{3}-2)\left(\frac{1}{9}-w_{1,3}-w_{1,4}\right)+\frac{5+\sqrt{3}}{18}\\
&=w_{1,3}+(4-2\sqrt{3})w_{1,4}+\frac{1+3\sqrt{3}}{18}
\end{aligned}$$

$w_{1,3}\geqq 0$, $w_{1,4}\geqq 0$ でそれぞれの係数が正であるから C が最小になる場合は $w_{1,3}=w_{1,4}=0$ である. ② ～ ⑥ より残りの $w_{i,j}$ を求めると,

$$\left.\begin{array}{l}
w_{1,5}=\frac{1}{9},\ w_{2,3}=w_{2,4}=\frac{1}{18}\\
w_{5,1}=-\frac{1}{9},\ w_{3,2}=w_{4,2}=-\frac{1}{18}\\
\text{上記以外の } w_{i,j} \text{ はすべて } 0
\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (\text{答})$$

である.