2010年度　東京工業大学　前期　数学

$\boxed{1}$

(1) $f(x) = 1 - \cos x - x\sin x$ とするとき，

$$f'(x) = -x\cos x$$

であるから，$0 < x < \pi$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる．ここで

x	(0)		$\dfrac{\pi}{2}$		(π)
$h'(x)$	(0)	$-$	0	$+$	
$h(x)$	(0)	↘		↗	(2)

$$f(0) = 0,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0,\quad f(\pi) = 2$$

であるから，$f(x) = 0$ は $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ では $f(x) < 0$ であり，$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ では単調に増加して符号を変える．
よって，$0 < x < \pi$ に おいて $f(x) = 0$ は唯一の解を持つ．　(終わり)

(2) $F'(x) = f(x)$ とすると

$$F(x) = \int (1 - \cos x - x\sin x)\,dx = x - \sin x + x\cos x - \int \cos x\,dx$$
$$= x(1 + \cos x) - 2\sin x + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

であり，(1) の唯一の解を α とすると

$$J = \int_0^\pi |\,f(x)\,|\,dx = \int_0^\alpha \{-f(x)\}\,dx + \int_\alpha^\pi f(x)\,dx$$
$$= F(0) + F(\pi) - 2F(\alpha)$$
$$= -2\{\,\alpha(1 + \cos\alpha) - 2\sin\alpha\,\}$$

である．ここで α は

$$f(\alpha) = 1 - \cos\alpha - \alpha\sin\alpha = 0 \iff 1 - \cos\alpha = \alpha\sin\alpha$$

を満たす $0 < \alpha < \pi$ の実数で，この両辺に $1 + \cos\alpha$ をかけると

$$1 - \cos^2\alpha = \alpha\sin\alpha(1 + \cos\alpha)$$

となる．よって

$$\alpha(1 + \cos\alpha) = \frac{1 - \cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \sin\alpha$$

であるから，J の式に用いて

$$J = -2(\sin\alpha - 2\sin\alpha) = 2\sin\alpha$$　…… (答)

(3) $f(x)$ は

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} + 1 - \frac{3\pi}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1.4 + 1 - \frac{3\times 3.2}{4}\right) = 0$$

であり，$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ で単調に増加するので，

$$f(\alpha) = 0 < f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \qquad \therefore\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$$

である．よって $\sin\alpha > \sin\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，(2) の結果を用いて

$$J > \sqrt{2}$$　…… (答)

$\boxed{2}$

ガウス記号の定義から，整数 n と実数 α について

$$[\alpha]=n \iff n \leqq \alpha < n+1$$

が成り立つ．したがって，$x=n$ に対して

$$n=\left[\frac{1}{2}\left(n+\frac{a}{n}\right)\right] \iff n \leqq \frac{1}{2}\left(n+\frac{a}{n}\right)<n+1$$
$$\iff n^2 \leqq a < (n+1)^2-1$$

となる．したがって，$x=n$ を (*) の解とする正の整数 a の集合は

$$A_n=\{n^2,\ n^2+1,\ \cdots,\ (n+1)^2-2\} \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

である．どの A_n にも属さない a が求めるものなので，それを順に並べると

$$2^2-1,\ 3^2-1,\ \cdots,\ (n+1)^2-1,\ \cdots \qquad \cdots\cdots ①$$

なので，

$$a_n=(n+1)^2-1=n(n+2)$$

となる．

(1) 上のことより

$$\begin{cases} a=8 \text{ に対して (*) の解はない．} \\ a=7,\ 9 \text{ に対して，それぞれ } x=2,\ 3 \text{ を解とする．} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) ①より

$$a_1=3,\quad a_2=8 \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) $a_n=n(n+2)$ なので

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

である．よって

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\longrightarrow\frac{3}{4}\quad(n\longrightarrow\infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{3}{4} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(別解)

ガウス記号の定義により，与方程式 (*) は

$$x=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)\right] \iff \frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)-1<x\leqq\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right) \text{ かつ } x \text{ は整数}$$

となる．この不等式の部分は $x>0$ のもとに

$$x^2+2x-a>0 \quad \text{かつ} \quad x^2-a\leqq 0$$

と変形され，$a>0$ であるから

$$\sqrt{a+1}-1<x\leqq\sqrt{a} \qquad \cdots\cdots ①$$

となる．

(1) ①を満たす整数 x があれば，それが解である．

$a=7$ のとき，①は　$\sqrt{8}-1<x\leqq\sqrt{7}$.　　これを満たす整数は　$x=2$.

$a=8$ のとき，①は　$2<x\leqq\sqrt{8}$.　　これを満たす整数 x は存在しない．

$a=9$ のとき，①は　$\sqrt{10}-1<x\leqq 3$.　　これを満たす整数は　$x=3$.

以上より

$a=7$ のとき解 $x=2$,　　$a=8$ のとき解なし，　　$a=9$ のとき解 $x=3$　　　　$\cdots\cdots$ (答)

(2) $a=1,\ 2$ のとき，①はそれぞれ

$$\sqrt{2}-1<x\leqq 1,\quad \sqrt{3}-1<x\leqq\sqrt{2}$$

であるから，いずれも $x=1$ で成り立つ．

$a=3$ のとき，①は　$1<x\leqq\sqrt{3}$　であり，これを満たす整数 x は存在しない．

$a=4,\ 5,\ 6,\ 7$ のとき，①はそれぞれ

$$\sqrt{5}-1<x\leqq 2,\quad \sqrt{6}-1<x\leqq\sqrt{5},\quad \sqrt{7}-1<x\leqq\sqrt{6},\quad \sqrt{8}-1<x\leqq\sqrt{7}$$

であるから，いずれも $x=2$ で成り立つ．

$a=8$ のとき，①は　$2<x\leqq\sqrt{8}$　であり，これを満たす整数 x は存在しない．

以上より

$a_1=3,\quad a_2=8$　　　　$\cdots\cdots$ (答)

(3) $a=1,\ 2$ で (*) の解はないので，$a\geqq 3$ とする．また，n を 正整数とする．

(i) $a=(n+1)^2-1$ のとき，①は

$$n<x\leqq\sqrt{(n+1)^2-1} \qquad \therefore\ n<x<n+1$$

であり，これを満たす整数 x は存在しない．

(ii) $(n+1)^2\leqq a\leqq(n+2)^2-2$ のとき，

$$\sqrt{a+1}-1\leqq\sqrt{(n+2)^2-1}-1<(n+2)-1=n+1$$
$$\sqrt{a}\geqq\sqrt{(n+1)^2}=n+1$$

であるから，①は $x=n+1$ で成り立つ．

よって

$$a_n=(n+1)^2-1=n(n+2) \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

であり，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$ (答)

$\boxed{3}$

2 枚のカードを引き方は全部で $N = {}_n\mathrm{C}_2$ 通りあり，これらは同様に確からしい．

(1) 1 から 8 までの整数のうち，3 の倍数は 3 と 6 である．

引いた数字の小さい方が 3 のとき，大きい方は 4, 5, 6, 7, 8 の 5 通り．
引いた数字の小さい方が 6 のとき，大きい方は 7, 8 の 2 通り．

よって

$$p(8) = \frac{5+2}{{}_8\mathrm{C}_2} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(2) $n = 3k+2$ で，引いた数字の小さい方が 3 の倍数

$3l \qquad (l = 1,\ 2,\ \cdots,\ k)$

であるとき，大きい方は

$(3k+2) - 3l = 3(k-l) + 2$ （通り）

だけある．よってこの場合の数は

$$\begin{aligned} M &= \sum_{l=1}^{k} \left\{ 3(k-l) + 2 \right\} \\ &= 3\left\{ (k-1) + (k-2) + \cdots + 1 \right\} + 2k \\ &= 3 \cdot \frac{(k-1)k}{2} + 2k = \frac{k(3k+1)}{2} \quad \text{(通り)} \end{aligned}$$

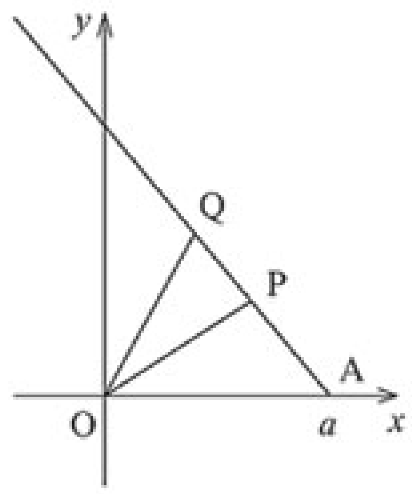
である．ここで，

$$N = {}_{3k+2}\mathrm{C}_2 = \frac{(3k+2)(3k+1)}{2}$$

であるから，

$$p(3k+2) = \frac{M}{N} = \frac{k}{3k+2} \qquad \cdots\cdots \text{(答)}$$

$\boxed{4}$



$P(x,\ y)$ は A と異なる点なので

$(x,\ y) \neq (a,\ 0)$ …… ①

である．また，$OQ \neq 0$ であるが，

$\dfrac{AQ}{AP} \leqq 2 \iff AP \geqq \dfrac{1}{2}AQ$

を満たす Q として O をとりうるのは，P が x 軸上で A に関して O と同じ側にあって $AP \geqq \dfrac{1}{2}AO = \dfrac{a}{2}$ を満たすときである．よって上の不等式を満たす P，Q について $OQ \neq 0$ であるための $P(x,\ y)$ の条件は

$y = 0$ のとき $x > \dfrac{a}{2}$ …… ②

である．

$AP \neq 0$，$OQ \neq 0$ のもとに $\dfrac{QP}{OQ} \leqq \dfrac{AP}{OA} \iff \dfrac{QP}{AP} \leqq \dfrac{OQ}{OA}$ であるから，P の条件は次のように表される．

$\dfrac{AQ}{AP} \leqq 2$ ならば $\dfrac{QP}{AP} \leqq \dfrac{OQ}{OA}$

さらに $\dfrac{AQ}{AP} = t$ とおくと次のようになる．

$0 \leqq t \leqq 2$ ならば $|t-1| \leqq \dfrac{OQ}{OA}$ …… ③

ここで $A(a,\ 0)$，$P(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AP}\\ &= \bigl(a + t(x-a),\ ty\bigr) = \bigl(tx - a(t-1),\ ty\bigr)\end{aligned}$$

であるから，③は

$0 \leqq t \leqq 2$ ならば $a|t-1| \leqq \sqrt{\bigl\{tx - a(t-1)\bigr\}^2 + t^2y^2}$ …… ④

となる．後の不等式の両辺は 0 以上で，2 乗して整理すると，

$a^2(t-1)^2 \leqq \bigl\{tx - a(t-1)\bigr\}^2 + t^2y^2$

より

$t^2x^2 - 2at(t-1)x + t^2y^2 \geqq 0$

$\therefore\ t\{t(x^2+y^2-2ax) + 2ax\} \geqq 0$

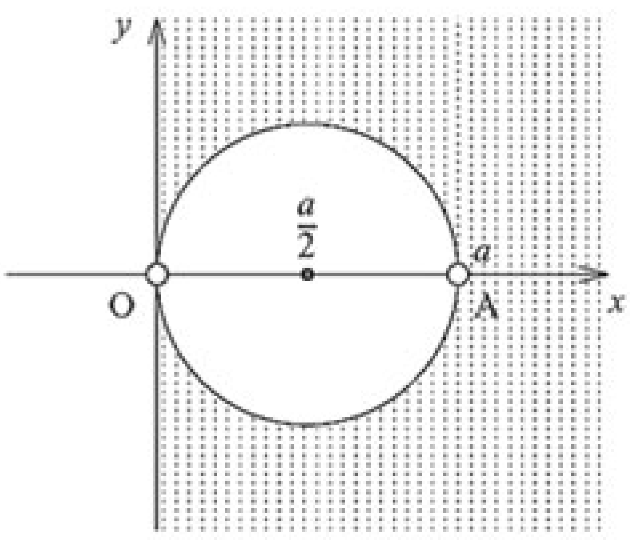
となり，これは $t = 0$ で成立するので，④は

$0 < t \leqq 2$ ならば $t(x^2+y^2-2ax) + 2ax \geqq 0$

と同値である．後の不等式の左辺を $f(t)$ とおくと，求める必要十分条件は

$$\begin{aligned}f(0) \geqq 0 \text{ かつ } f(2) \geqq 0 &\iff x \geqq 0 \text{ かつ } x^2+y^2-ax \geqq 0\\ &\iff x \geqq 0 \text{ かつ } \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \geqq \frac{a^2}{4}\end{aligned}$$

である．①，②のもとにこの不等式の示す領域 D は下図の網掛け部である (2 点 O，A 以外の境界を含む)．



…… (答)