$\boxed{1}$

(1) $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}-\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{y^3-x^3}{y-x}-\frac{x^3-a^3}{x-a}\\
&=\frac{(y-x)(y^2+yx+x^2)}{y-x}-\frac{(x-a)(x^2+xa+a^2)}{x-a}\\
&=y^2+yx+x^2-(x^2+xa+a^2)\\
&=y^2-a^2+yx-xa\\
&=(y-a)(y+a)+x(y-a)\\
&=(y-a)(y+a+x)\\
&>0 \quad (\because\ y-a>0,\quad y+a+x>0 \text{ より})
\end{aligned}
$$

したがって，$0 \leqq a<x<y$ を満たすすべての a, x, y に対して

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}>\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

が成り立つ．

(2) $b-y>0$, $b-x>0$, $x-y>0$ より，

$$
\begin{aligned}
&f(x)>\frac{(x-y)f(b)+(b-x)f(y)}{b-y}\\
&\iff (b-y)f(x)>(x-y)f(b)+(b-x)f(y)\\
&\iff (b-x+x-y)f(x)>(x-y)f(b)+(b-x)f(y)\\
&\iff (b-x)f(x)+(x-y)f(x)>(x-y)f(b)+(b-x)f(y)\\
&\iff (b-x)\{f(x)-f(y)\}>(x-y)\{f(b)-f(x)\}\\
&\iff \frac{f(x)-f(y)}{x-y}>\frac{f(b)-f(x)}{b-x} \qquad \cdots\cdots①
\end{aligned}
$$

(i) $b \leqq 0$ のとき，$y<x<b \leqq 0 \iff 0 \leqq -b<-x<-y$ なので，(1) より，

$$\frac{f(-y)-f(-x)}{-y-(-x)}>\frac{f(-x)-f(-b)}{-x-(-b)}$$

が成り立つ．さらに，$f(-x)=-f(x)$ なので，

$$\frac{-f(y)+f(x)}{-y+x}>\frac{-f(x)+f(b)}{-x+b}$$

つまり，① が成り立つ．

(ii) $b>0$ のとき，$0 \leqq y < x < b$ となる x，y に対して，(1) の結果より

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

が成り立ち，① は成り立たない.

以上，(i), (ii) より，題意を満たすのは

$$b \leqq 0 \qquad \cdots\cdots(答)$$

のときである.

$\boxed{2}$

(1) $f(x)=x^2$ に対して，$f'(x)=2x$ であり，$a \fallingdotseq 0$ のとき，直線 l の方程式は

$$y=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+a^2=-\frac{1}{2a}x+\frac{1}{2}+a^2$$

$$\therefore \quad x+2ay=a+2a^3 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$a=0$ のときは，$l: x=0$ であり，この場合もこの式に含まれる．

(2) 直線 $x=a$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ t)$ の l に関して対称な点を $\mathrm{B}(x,\ y)$ とおく．
線分 AB の中点 $\left(\dfrac{x+a}{2},\ \dfrac{y+t}{2}\right)$ が直線 l 上にあるので，

$$\frac{x+a}{2}+2a\cdot\frac{y+t}{2}=a+2a^3$$
$$x+a+2a(y+t)=2a+4a^3 \qquad \cdots①$$

また，直線 AB と l は直交するので，($a \fallingdotseq 0$ のとき，$x \fallingdotseq a$ に注意して)

$$\frac{t-y}{a-x}\times\left(-\frac{1}{2a}\right)=-1$$
$$\therefore \quad t=2a^2-2ax+y$$

これを ① に代入して整理すると，直線 m の方程式は

$$(1-4a^2)x+4ay=a \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．

(3) (2) の結果を a について整理すると，

$$4xa^2+(1-4y)a-x=0$$

これがすべての a で成り立つための条件は，$x=0$ かつ $y=\dfrac{1}{4}$ である．つまり，直線 m は a の値によらず，定点

$$\mathrm{F}\left(0,\ \frac{1}{4}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

を通る．

$\boxed{3}$

1回の試行での点Pの移動量は，題意より，

確率 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ で　$+1$

確率 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ で　-1

確率 $1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ で　0

となる．

(1) $n=2$ のとき，　$-1=0+(-1)$

移動量 $0,\ -1$ が1回目，2回目のどちらの試行に現れるかも考えると，$S_2=-1$ となる確率は

$$2\times\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

(2) $n=3$ のとき，　$1=1+0+0=1+1+(-1)$

移動量 $1,\ 0,\ 0$ と $1,\ 1,\ -1$ のそれぞれで，現れる順番も考えると，$S_3=1$ となる確率は

$$3\times\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{16}+\frac{3}{64}=\boldsymbol{\frac{15}{64}}$$

(3) 試行を n 回繰り返すと合計 $2n$ 枚の硬貨を投げることになる．したがって，表の出た硬貨の総数を i とすると，裏の出た硬貨の総数は $2n-i$ になる．

いま，n 回の試行のうち，移動量が $1,\ -1,\ 0$ であるような試行の回数を，それぞれ，$x,\ y,\ z$ とすると，

$$S_n=x\times1+y\times(-1)=x-y$$

となる．

一方，表・裏の硬貨の枚数について，関係式

$$\begin{cases}2x+z=i\\2y+z=2n-i\end{cases}$$

が成り立つ．辺々引いて z を消去すると

$$2(x-y)=i-(2n-i)=2(i-n)\qquad\therefore\ x-y=i-n$$

したがって，

$$\boldsymbol{S_n=i-n}$$

(4) (3)の結果より，S_n は試行の回数 n と表の出た硬貨の総数 i だけで決まることがわかる．

$$S_n=k\iff i-n=k\iff i=n+k$$

であるから，$S_n = k$ となるのは，$2n$ 枚投げる硬貨のうち $i = n + k$ 枚の硬貨に表が出るときである．その確率は，

$$ {}_{2n}\mathrm{C}_i \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-i} = {}_{2n}\mathrm{C}_{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n+k)!(n-k)!} $$

$\boxed{4}$

(1) もし，与えられた等式が成り立つと仮定すると，

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$$
$$\iff \quad 2\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{PN}$$
$$\iff \quad M=N$$

となることより，題意に適さない．よって，与えられた等式を満たす点 P は存在しない．

（証明終わり）

(2)
$$|\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{QD}|$$
$$\iff \quad |2\overrightarrow{QM}|=|2\overrightarrow{QN}|$$
$$\iff \quad QM=QN$$

より，点 Q が描く図形は，線分 MN の中点を通り，MN に垂直な平面である．……（答）

(3)
$$|\overrightarrow{RA}|^2+|\overrightarrow{RB}|^2=|\overrightarrow{RC}|^2+|\overrightarrow{RD}|^2$$
$$\iff \quad 2\left(|\overrightarrow{RM}|^2+|\overrightarrow{MA}|^2\right)=2\left(|\overrightarrow{RN}|^2+|\overrightarrow{NC}|^2\right) \qquad (\because \text{中線定理})$$
$$\iff \quad |\overrightarrow{MR}|^2+|\overrightarrow{MA}|^2=|\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MR}|^2+|\overrightarrow{NC}|^2$$
$$\iff \quad |\overrightarrow{MA}|^2=|\overrightarrow{MN}|^2-2\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}+|\overrightarrow{NC}|^2$$

よって，$2\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}=|\overrightarrow{MN}|^2+|\overrightarrow{NC}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2$ （＝一定） （証明終わり）

(4) 点 Q が描く図形と点 R が描く図形が一致するということは，(2) より，RM＝RN が成り立つことであるので，

$$RM=RN$$
$$\iff \quad |\overrightarrow{MR}|=|\overrightarrow{NR}|$$
$$\iff \quad |\overrightarrow{MR}|^2=|\overrightarrow{MR}-\overrightarrow{MN}|^2$$
$$\iff \quad 2\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}=|\overrightarrow{MN}|^2$$
$$\iff \quad |\overrightarrow{NC}|^2=|\overrightarrow{MA}|^2 \qquad (\because (3))$$
$$\iff \quad |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$$

以上より，題意は示された． （証明終わり）