$\boxed{1}$

(1) 線分PD上の点Kは，$0 \leqq k \leqq 1$ なる実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OK} = (1-k)\overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{OD} = (1-k,\ k,\ k) \quad \cdots\cdots ①$$

と表せる．また点Kは3点O，M，Nを通る平面上にあるから

$$\overrightarrow{OK} = m\overrightarrow{OM} + n\overrightarrow{ON} = \left(m,\ \frac{1}{2}m+n,\ m+tn\right) \quad \cdots\cdots ②$$

と表せ，①，②より

$$\begin{cases} 1-k = m & \cdots\cdots ③ \\ k = \frac{1}{2}m+n & \cdots\cdots ④ \\ k = m+tn & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

ここで，点Nが線分RD上にあるから

$$0 \leqq t \leqq 1 \quad \cdots\cdots ⑥$$

に注意すると

$$③ \text{かつ} ④ \iff m = 1-k,\ n = \frac{1}{2}(3k-1)$$

と⑤に用いて

$$k = (1-k) + \frac{t}{2}(3k-1)$$

$$\iff k = \frac{2-t}{4-3t} \quad (⑥\text{より，この}k\text{は}0 \leqq k \leqq 1\text{を満たす})$$

よって，求める点Kの座標は

$$\left(\frac{2-2t}{4-3t},\ \frac{2-t}{4-3t},\ \frac{2-t}{4-3t}\right) \quad \cdots\cdots (答)$$

(2) 線分PB上の点Lは，$0 \leqq l \leqq 1$ なる実数 l を用いて

$$L(1,\ 0,\ l)$$

と表せ，(1)と同様に，m，n をおくと

$$1 = m,\ 0 = \frac{1}{2}m+n,\ l = m+tn$$

となることより，$l = 1-\frac{1}{2}t$ であるから

$$L\left(1,\ 0,\ 1-\frac{1}{2}t\right)$$

このとき

$$\begin{cases} \text{三角形OPLの面積} & \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}t\right) \\ \text{点Kとzx平面の距離} & \frac{2-t}{4-3t} \end{cases}$$

と考えて

$$V(t)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}t\right)\cdot\frac{2-t}{4-3t}=\frac{(2-t)^2}{12(4-3t)}$$

これより

$$V'(t)=\frac{(2-t)(3t-2)}{12(4-3t)^2}$$

であり ⑥における $V(t)$ の増減は次のとおり

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$	$\frac{1}{12}$	$\searrow$	$\frac{2}{27}$	$\nearrow$	$\frac{1}{12}$

よって

$$\begin{cases} V(t)\text{の最大値 } \frac{1}{12}\ (t=0,1\text{ のとき}) \\ V(t)\text{の最小値 } \frac{2}{27}\ (t=\frac{2}{3}\text{ のとき}) \end{cases}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

2 (1) $f'(x)=(2x-1)e^{-x}-(x^2-x)e^{-x}=(-x^2+3x-1)e^{-x}$

$f''(x)=(-2x+3)e^{-x}-(-x^2+3x-1)e^{-x}=(x^2-5x+4)e^{-x}=(x-1)(x-4)e^{-x}$

$f'(x)=0$ とおくと $x^2-3x+1=0$ より $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

よって $f(x)$ の増減は次のとおり

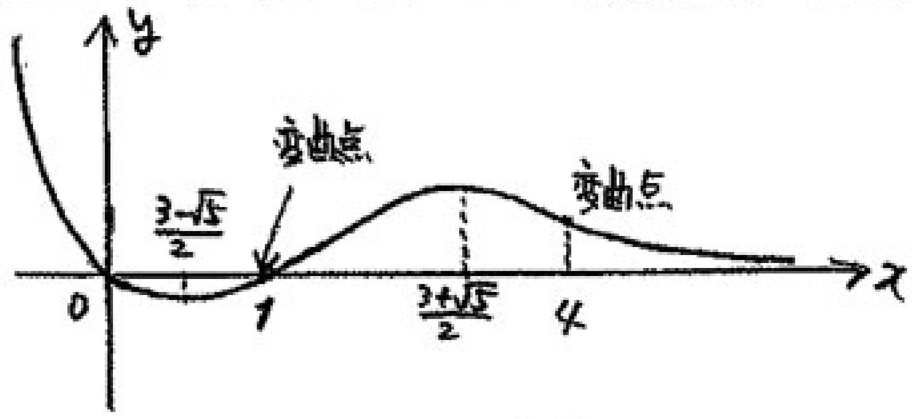
x	$(-\infty)$		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		4		$(+\infty)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$(+\infty)$	$\searrow$	(極小)	$\nearrow$	(変曲点)	$\nearrow$	(極大)	$\searrow$	(変曲点)	$\searrow$	(0)

$f(1)=(1-1)e^{-1}=0$、$f(4)=(16-4)e^{-4}=12e^{-4}$ より変曲点は $(1,0)$ と $(4,12e^{-4})$ ……(答)

また $f(x)=0$ とおくと $x^2-x=0$ より $x=0,1$

さらに $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x}(1-\frac{1}{x})=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}(1-\frac{1}{x})=0$

以上により $y=f(x)$ のグラフの概形は下図



(2) $x=t$ の点における $y=f(x)$ の接線は

$y=(-t^2+3t-1)e^{-t}(x-t)+(t^2-t)e^{-t}$

これが $(0,a)$ を通るのは

$a=(-t^2+3t-1)e^{-t}(-t)+(t^2-t)e^{-t}=(t^3-2t^2)e^{-t}$ ……②

が成り立つ時。ここで(1)のグラフより $y=f(x)$ の異なる2点での接線が一致する事はないので $(0,a)$ を通る接線が1本だけとなるのは ②の異なる実数解の個数が1つだけの時 そこで

$g(t)=(t^3-2t^2)e^{-t}$

とおくと $y=g(t)$ のグラフと $y=a$ の共有点が1つだけであればよい

$g'(t)=(3t^2-4t)e^{-t}-(t^3-2t^2)e^{-t}=(-t^3+5t^2-4t)e^{-t}=-t(t-1)(t-4)e^{-t}$

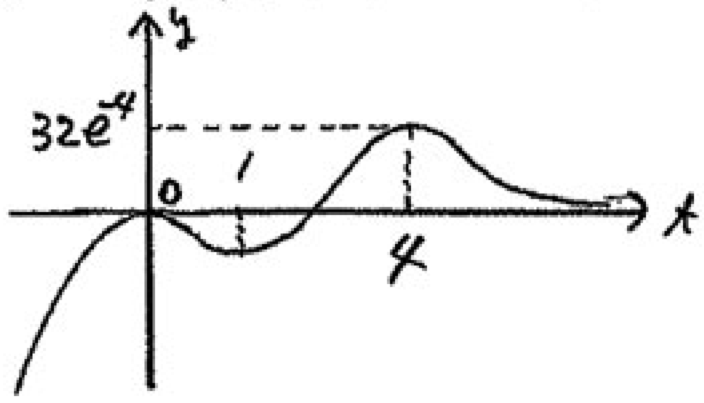
より $g(t)$ の増減は次のとおり

t	$(-\infty)$		0		1		4		$(+\infty)$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$32e^{-4}$	$\searrow$	(0)

ここで $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3e^{-x}\left(1-\frac{2}{x}\right)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x}\left(1-\frac{1}{x}\right)=0$

および $g(0)=0$, $g(1)=(1-2)e^{-1}=-e^{-1}$, $g(4)=(64-32)e^{-4}=32e^{-4}\ (>0)$

なので $y=g(x)$ のグラフは下図



よって $a>0$ でこのグラフと $y=a$ の共有点が1つだけになるのは

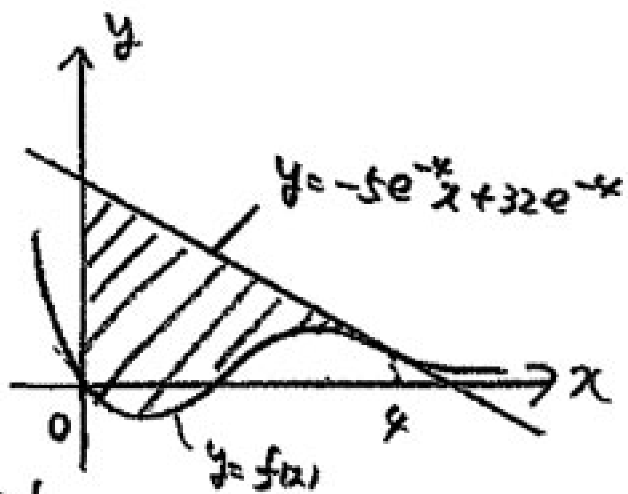
$\underline{a=32e^{-4}}$ …… (答)

の時. この時 $x=4$ での接線

$y=(-16+12-1)e^{-4}(x-4)+(16-4)e^{-4}$

$=-5e^{-4}x+32e^{-4}$

と $y=f(x)$ のグラフ, x軸で囲まれる部分の面積をSとすると



$S=\int_0^4\left\{(-5x+32)e^{-4}-(x^2-x)e^{-x}\right\}dx$

$=\left[\left(-\frac{5}{2}x^2+32x\right)e^{-4}\right]_0^4-\left\{\left[-(x^2-x)e^{-x}\right]_0^4+\int_0^4(2x-1)e^{-x}dx\right\}$

$=(-40+128)e^{-4}+(16-4)e^{-4}-\left\{\left[-(2x-1)e^{-x}\right]_0^4+\int_0^4 2e^{-x}dx\right\}$

$=100e^{-4}+\left\{(8-1)e^{-4}+1\right\}-\left[-2e^{-x}\right]_0^4$

$=107e^{-4}+1+2(e^{-4}-1)=\underline{109e^{-4}-1}$ ----- (答)

3

(1) $n=1$

硬貨を1回投げて

表が出ると赤玉はAからBに移る
裏が出ると赤玉はAに残る

$\therefore\ a_1 = \dfrac{1}{2},\ b_1 = \dfrac{1}{2},\ c_1 = 0$ ----- (答)

$n=2$

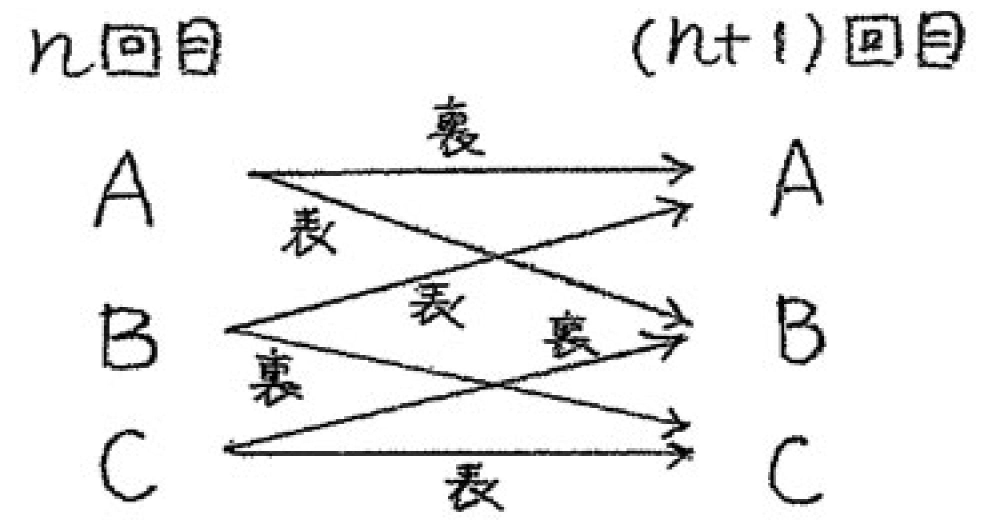
硬貨を2回投げて

表,表が出ると赤玉はAからB,BからAに移る
表,裏が出ると赤玉はAからB,BからCに移る
裏,表が出ると赤玉はAに残り,AからBに移る
裏,裏が出ると赤玉はAに残る

$\therefore\ a_2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2},\ b_2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4},\ c_2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

----- (答)

(2) 赤玉の移動について次の表のようになる。



$(n+1)$回後にAが赤玉を持っているのは

・n回後にAが赤玉を持っていて,$(n+1)$回目に裏が出る

または

・n回後にBが赤玉を持っていて,$(n+1)$回目に表が出る

のいずれかであり,これらは排反だから

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \quad \text{-----①} \quad (答)$$

B,Cの場合も同様にして

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \quad \text{-----②}$$
$$c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \quad \text{-----③} \quad (答)$$

(3) ①+②+③ から

$$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=a_n+b_n+c_n$$

これと (1) より

$$a_n+b_n+c_n=1 \quad \cdots\cdots ④$$

②, ④ から a_n+c_n を消去して

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}(1-b_n)$$

$$\Longleftrightarrow \quad b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore \quad b_n-\frac{1}{3}=\left(b_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$b_1=\frac{1}{2}$ から $\quad b_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \cdots\cdots$ (答)

このとき, ④ より

$$a_n+c_n=1-b_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots\cdots ⑤$$

① − ③ から

$$a_{n+1}-c_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n-c_n)$$

$$\therefore \quad a_n-c_n=(a_1-c_1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots\cdots ⑥$$

⑤, ⑥ から

$$a_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$c_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \cdots\cdots (答)$$

$\boxed{4}$

(1) x座標が $6t$（t:整数）の点のy座標は $y=12t^2+3t$（整数）
よって 点$(6t, 12t^2+3t)$（t:整数）は題意のグラフ上の格子点であり，tは無限にあるので題意は成り立つ．（証明終り）

(2) $(p, n), (q, m)$ をグラフ上にある$(0,0)$以外の2つの格子点とすると

$$\begin{cases} ap^2+bp=n \quad \cdots\cdots ① \\ aq^2+bq=m \quad \cdots\cdots ② \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l}\text{ただし，}p, q, m, n\text{ は整数で} \\ p \neq q,\ p\neq 0,\ q\neq 0\end{array}\right)$$

①,②をa, bについて解く

$①\times q - ②\times p$: $apq(p-q)=nq-mp$　$\therefore\ a=\dfrac{nq-mp}{pq(p-q)}$

$①\times q^2 - ②\times p^2$: $bpq(q-p)=nq^2-mp^2$　$\therefore\ b=\dfrac{mp^2-nq^2}{pq(p-q)}$

ここで，$pq(p-q)=N(\neq 0)$, $nq-mp=A$, $mp^2-nq^2=B$ とおくと
N, A, B は整数であり　$a=\dfrac{A}{N}$, $b=\dfrac{B}{N}$

このときグラフの方程式は　$y=\dfrac{A}{N}x^2+\dfrac{B}{N}x$ $\cdots\cdots ①$

ここで tを整数として 点(Nt, ANt^2+Bt) を考えると
これは①上の格子点であり，tは無限にあるので
題意は成り立つ．（証明終り）