1

1列に並べた数を順に a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 とすると，題意の並べ方は，$a_1+a_2+a_3=a_3+a_4+a_5$，すなわち

$$a_1+a_2=a_4+a_5 \qquad \text{---①}$$

となる並べ方である．①のとき $a_1+a_2+a_4+a_5$ は偶数であり，すべての数の和は 15 に等しいから奇数である．

したがって a_3 は奇数であるから

$$a_3=1,\ 3,\ 5$$

のいずれかであり，

(i) $a_3=1$ のとき $\{a_1, a_2\}=\{2, 5\}, \{3, 4\}$ のいずれか

(ii) $a_3=3$ のとき $\{a_1, a_2\}=\{1, 5\}, \{2, 4\}$ 〃

(iii) $a_3=5$ のとき $\{a_1, a_2\}=\{1, 4\}, \{2, 3\}$ 〃

である．ここで (i) の場合 $\{a_1, a_2\}=\{2, 5\}$ とすると $\{a_4, a_5\}=\{3, 4\}$ であり，a_1, a_2 は 1, 2 または 2, 1 の 2 通り，a_4, a_5 も 3, 4 または 4, 3 の 2 通り，$\{a_1, a_2\}=\{3, 4\}$ の場合も同様であるから，(i) の並べ方は

$$2\times2\times2=8 \text{ (通り)}$$

である．(ii), (iii) の場合も同様に 8 通りずつあり，並べ方は全部で $5!$ 通りあるから，求める確率は

$$\frac{3\times8}{5!}=\frac{1}{5} \qquad \text{---(答)}$$

2

3点A，B，Mを通る平面は $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ に平行であり，$\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ は平行でないから $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ をいえばよい．

$\overrightarrow{\mathrm{MA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{MC}} = \vec{c}$ とおく．Mは辺CDの中点だから $\overrightarrow{\mathrm{MD}} = -\vec{c}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{DB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = (\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$$

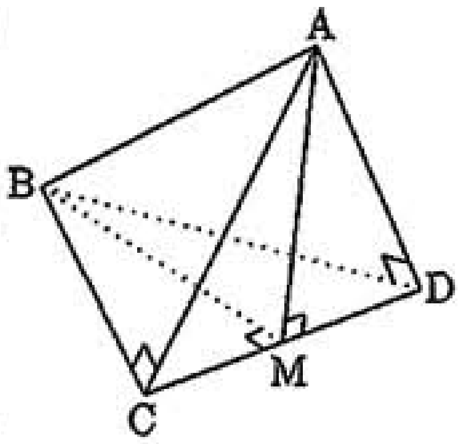
$$\therefore \ \vec{a} \cdot \vec{b} - (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DB}} = (\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 0$$

$$\therefore \ \vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (-\vec{c} - \vec{c}) = 0$$

$$\therefore \ \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$



②－①より

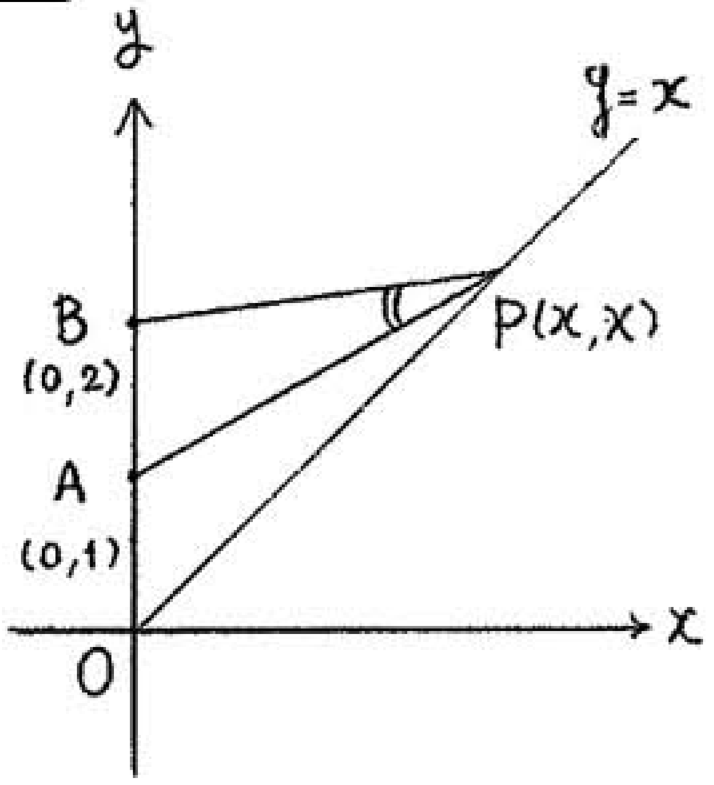
$$2(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \qquad \therefore \ \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

④±③より

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \qquad \therefore \ \overrightarrow{\mathrm{MA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{MB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

(証明終わり)

3



直線AP，BPの傾きをそれぞれ m_1，m_2 とすると

$$m_1=\frac{x-1}{x}\ ,\ m_2=\frac{x-2}{x}$$

$x>0$ より $m_2<m_1$ であり

$$m_1=\tan\alpha\ ,\ m_2=\tan\beta$$
$$\left(-\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと

$\angle APB=\alpha-\beta$ であるから

$$\tan\angle APB=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

$$=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{(x-1)(x-2)}{x^2}}=\frac{x}{2x^2-3x+2}=\frac{1}{2x-3+\frac{2}{x}}$$

$$=\frac{1}{2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3}$$

$x>0$ より相加平均と相乗平均の関係を用いると

$$x+\frac{1}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$$

等号は $x=\frac{1}{x}\ (>0)$ つまり $x=1$ のとき成り立つ。

$$\therefore\quad 2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3\geqq 2\cdot 2-3=1$$

$$\therefore\quad 0<\tan\angle APB\leqq 1$$

$\tan\angle APB$ の値が正であるから，$\angle APB$ は鋭角である。
よって，$\tan\angle APB$ の値が最大のとき，$\angle APB$ は最大になる。
$\angle APB$ の最大値は，$\tan\angle APB=1$ から

最大値 $\dfrac{\pi}{4}$ ----- (答)

4

$$0 \leqq 3a_n \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n \geqq 1) \quad \cdots\cdots ①$$

「すべての正の整数nに対して $a_n = 0$ ……(＊) である」 ことを数学的帰納法を用いて証明する．

(i) $n=1$ のとき

①で $n=1$ とおくと，$0 \leqq 3a_1 \leqq a_1$ から

$a_1 \geqq 0$ かつ $a_1 \leqq 0$ $\quad \therefore\ a_1 = 0$

よって，(＊)が成り立つ．

(ii) $n \leqq m$ のとき (＊) が成り立つことを仮定すると

$$a_1 = a_2 = \cdots\cdots = a_m = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

①で $n = m+1$ とおくと

$$0 \leqq 3a_{m+1} \leqq \sum_{k=1}^{m+1} a_k$$

②を用いて

$$0 \leqq 3a_{m+1} \leqq a_{m+1}$$

$\therefore\ a_{m+1} \geqq 0$ かつ $a_{m+1} \leqq 0$

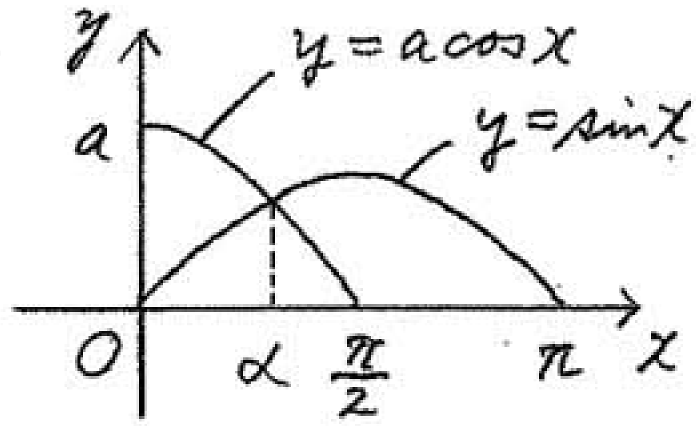
$\therefore\ a_{m+1} = 0$

よって，$n = m+1$ のときも(＊)が成り立つ

(i)(ii)より，すべての正の整数nに対して $a_n = 0$ が成り立つことが示された．

（証明終わり）

5



2曲線の交点のx座標をα $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$とおく。このとき

$$\sin\alpha = a\cos\alpha$$

$$\therefore\ a=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cdots ①$$

である。題意より

$$\begin{aligned}
T &= \int_0^{\alpha}\sin x\,dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x\,dx \\
&= \Big[-\cos x\Big]_0^{\alpha} + a\Big[\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\cos\alpha + 1 + a(1-\sin\alpha) \\
&= -\cos\alpha + 1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(1-\sin\alpha) \qquad (①より) \\
&= \frac{\cos\alpha + \sin\alpha - 1}{\cos\alpha}
\end{aligned}$$

であり、

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = 2$$

であるから $S:T=3:1$ より

$$3\cdot\frac{\cos\alpha+\sin\alpha-1}{\cos\alpha}=2$$

$$\therefore\ \cos\alpha = 3(1-\sin\alpha)$$

である。両辺を平方すると

$$1-\sin^2\alpha = 9(1-\sin\alpha)^2$$

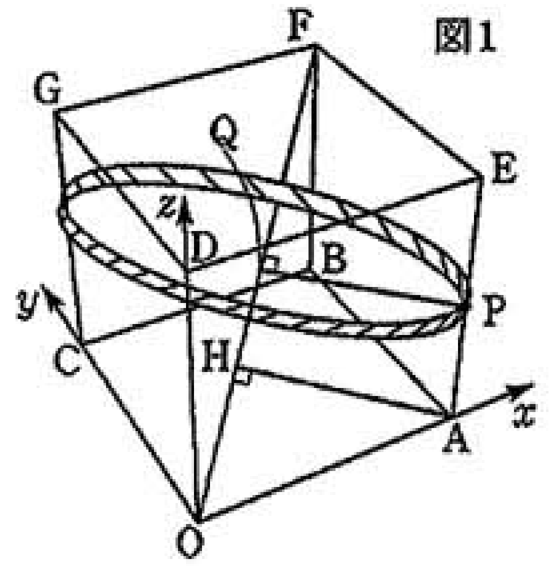
$$\therefore\ (\sin\alpha-1)(5\sin\alpha-4)=0$$

であり、$0<\sin\alpha<1$ であるから $\sin\alpha=\frac{4}{5}$、したがって
$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{3}{5}$ である。よって①より

$$a=\frac{4}{3} \qquad \cdots(答)$$

6

AE 上の点 P から OF におろした垂線の足を Q とする．
$P(1,\ 0,\ t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ とおく．



$\overrightarrow{OQ}=u\overrightarrow{OF}$ とおける．

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=u\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OP}$

が $\overrightarrow{OF}$ と垂直だから $(u\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{OF}=0$

$u|\overrightarrow{OF}|^2-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OF}=0$ $\quad\therefore\quad u=\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OF}}{|\overrightarrow{OF}|^2}=\dfrac{1+t}{3}$

$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1+t}{3}(1,\ 1,\ 1)$ $\quad\therefore\quad |\overrightarrow{OQ}|=\dfrac{1+t}{3}\sqrt{3}$

$\angle OQP=90^\circ$ だから三平方の定理より

$PQ^2=OP^2-OQ^2=1+t^2-\dfrac{(1+t)^2}{3}$

$OQ=s$ とおくと

$s=\dfrac{1+t}{3}\sqrt{3}$ $\quad\therefore\quad t=\sqrt{3}s-1$

$PQ^2=1+(\sqrt{3}s-1)^2-s^2=2s^2-2\sqrt{3}s+2$

$0 \leqq t \leqq 1$ だから $\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leqq s \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

A から OF におろした垂線の足を H とすると，

$t=0$ のときを考えて $OH=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\quad AH^2=\dfrac{2}{3}$

$\triangle OAH$ を回転してできる円錐を 2 つと，P を回転してできる立体の体積を考えて，求める体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2+\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\pi PQ^2\,ds$$

$$=\frac{4}{27}\sqrt{3}\pi+\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}(2s^2-2\sqrt{3}s+2)ds$$

$$=\frac{4}{27}\sqrt{3}\pi+\pi\left[\frac{2}{3}s^3-\sqrt{3}s^2+2s\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

$$=\frac{4}{27}\sqrt{3}\pi+\pi\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{8\sqrt{3}}{9}-\frac{4}{3}\sqrt{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$-\pi\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{9}-\frac{1}{3}\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\cdots\cdots\text{（答）}$$

≪注≫　立体の概形は下図のようになり，AE を回転してできる部分は回転一葉双曲面と呼ばれる曲面です．

図2