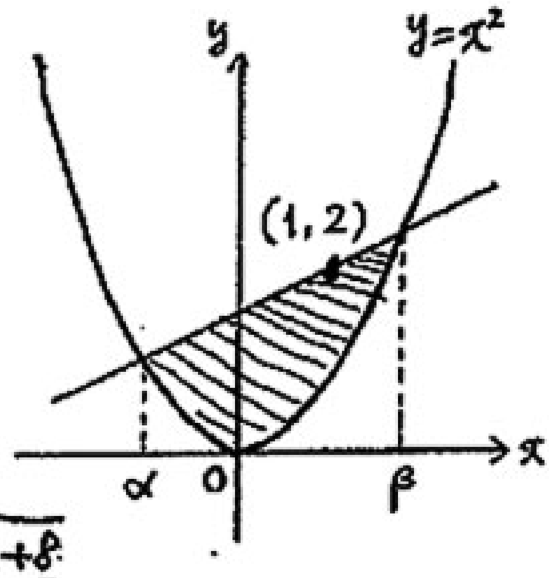
1

(1) 題意の直線の方程式は、



$$y-2=a(x-1)$$

$$\Longleftrightarrow y=ax-a+2.$$

これと放物線 $y=x^2$ の交点の x 座標は、$x^2=ax-a+2$ より、$x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4a+8}}{2}$

これらを α, β $(\alpha<\beta)$ とおくと、

$$S(a)=\int_\alpha^\beta\{(ax-a+2)-x^2\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

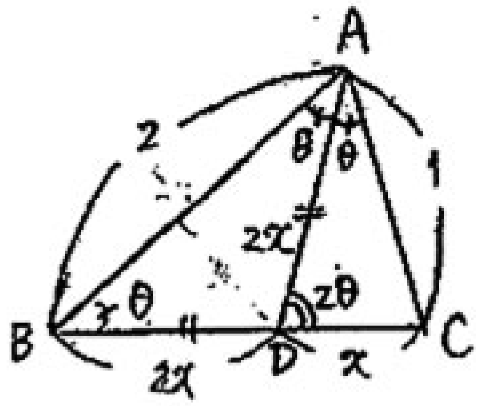
$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-4a+8}\right)^3$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{(a-2)^2+4}\right)^3$$

よって、a が $0\leqq a\leqq 6$ の範囲で変化するとき、$S(a)$ を最小にする a の値は、

$a=2$ ………(答)

(2) $\angle BAD=\angle CAD=\theta$ とし、$AD=BD=2x$ とする。



このとき、内角の二等分線の性質より、

$$BD:DC=2:1$$

$$\therefore DC=x$$

また、$\angle ABC=\theta$ であり、$\angle ADC=2\theta$ となる。

よって、△ABCで正弦定理より

$$\frac{3x}{\sin 2\theta}=\frac{1}{\sin\theta}$$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ より、$3x = 2\cos\theta$ ……①

△ACDで正弦定理より.

$$\frac{1}{\sin 2\theta}=\frac{x}{\sin\theta} \quad \therefore\ x=\frac{1}{2\cos\theta} \text{ ……②}$$

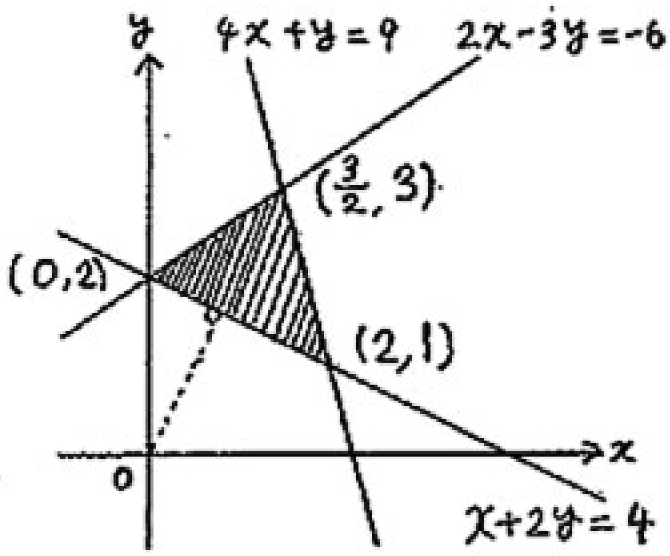
①, ② より、$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{6}$

したがって.

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ……(答)}$$

2

$$\begin{cases} 4x+y \leqq 9 \\ x+2y \geqq 4 \\ 2x-3y \geqq -6 \end{cases}$$ の表す領域は



図の境界を含む斜線部分。

$2x+y=k \Leftrightarrow y=-2x+k$ とおくと

最大値は $P(x,y)=\left(\frac{3}{2},3\right)$ のときで

$k=2\cdot\frac{3}{2}+3=6$ ……………(答)

最小値は $P(x,y)=(0,2)$ のときで

$k=2\cdot 0+2=2$ ……………(答)

x^2+y^2 の値は原点から点 (x,y) までの距離の平方で

最大値は $P(x,y)=\left(\frac{3}{2},3\right)$ のときで

$x^2+y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+3^2=\frac{45}{4}$ ……………(答)

原点Oから点Pまでの最短距離はOから

直線 $x+2y=4$ までの距離で最小値は

$\left(\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}\right)^2=\frac{16}{5}$ ……………(答)

3

1列に並べた数を順に a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 とすると，題意の並べ方は，$a_1+a_2+a_3=a_3+a_4+a_5$，すなわち

$$a_1+a_2=a_4+a_5 \quad \cdots①$$

となる並べ方である．①のとき $a_1+a_2+a_4+a_5$ は偶数であり，すべての数の和は 15 に等しいから奇数である．

したがって a_3 は奇数であるから

$$a_3=1,\ 3,\ 5$$

のいずれかであり，

(i) $a_3=1$ のとき $\{a_1, a_2\}=\{2, 5\}, \{3, 4\}$ のいずれか

(ii) $a_3=3$ のとき $\{a_1, a_2\}=\{1, 5\}, \{2, 4\}$ 〃

(iii) $a_3=5$ のとき $\{a_1, a_2\}=\{1, 4\}, \{2, 3\}$ 〃

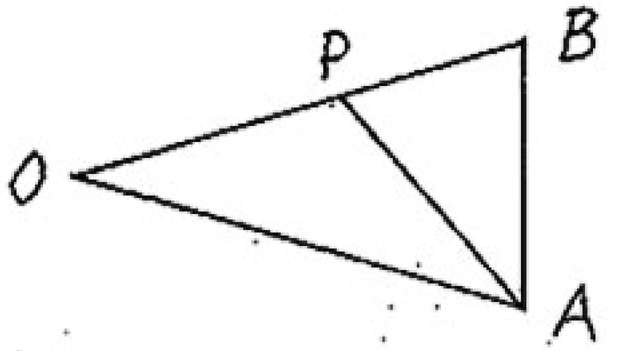
である．ここで(i)の場合 $\{a_1, a_2\}=\{2, 5\}$ とすると $\{a_4, a_5\}=\{3, 4\}$ であり，a_1, a_2 は 1, 2 または 2, 1 の 2通り，a_4, a_5 も 3, 4 または 4, 3 の 2通り，$\{a_1, a_2\}=\{3, 4\}$ の場合も同様であるから，(i)の並べ方は

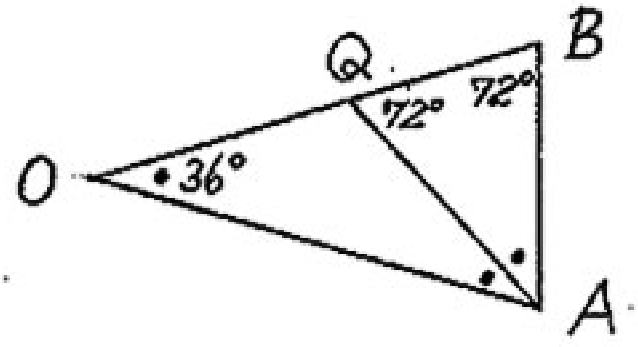
$$2\times2\times2=8 \text{（通り）}$$

である．(ii)，(iii)の場合も同様に 8通りずつあり，並べ方は全部で $5!$ 通りあるから，求める確率は

$$\frac{3\times8}{5!}=\frac{1}{5} \quad \cdots\text{（答）}$$

4





$OP = xOB$ $(0<x<1)$ とおけて，$PB=(1-x)OB$ より，

$$OP^2 = OB\cdot PB \iff x^2 = 1-x \iff x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore\ OP=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}OB \quad \cdots\cdots ①$$

一方，$\angle O = 36°$，$\angle OAB = \angle B = 72°$ だから，線分 OB 上に点 Q を，$\angle QAB = \angle QAO = 36°$ となるようにとれば，

$\angle AQB = 72°$ となり，

$$AB = AQ = OQ \quad \cdots\cdots ②$$

また，$\triangle OAB \backsim \triangle ABQ$ より，$OB : AB = AB : QB$

$$\therefore\ AB^2 = OB\cdot QB \quad \cdots\cdots ③$$

よって，②，③ より，

$$OQ^2 = OB\cdot QB$$

となるから，P の場合と同様に，

$$OQ=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}OB \quad \cdots\cdots ④$$

①，④ より，$OP = OQ$ となるから，② より，

$$OP = AB$$

（証明終わり）

5

（1） A から OF に下ろした垂線の足を H とする．

$\overrightarrow{OH}=h\overrightarrow{OF}$ とおける．

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=h\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA}$

が $\overrightarrow{OF}$ と垂直だから $(h\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OF}=0$

$$h|\overrightarrow{OF}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OF}=0 \qquad \therefore \quad h=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OF}}{|\overrightarrow{OF}|^2}=\frac{1}{3}$$

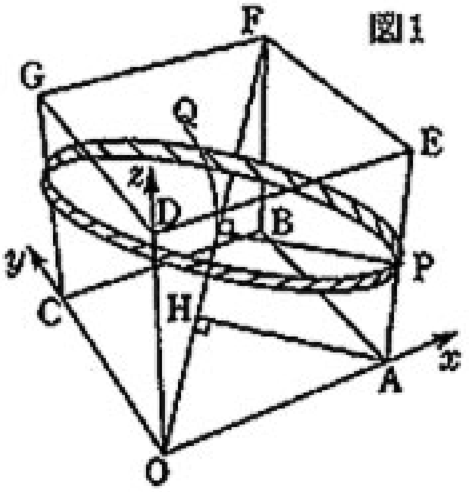
$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}(1,\ 1,\ 1) \qquad \therefore \quad OH=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\angle OHA=90°$ だから三平方の定理より

$$AH^2=OA^2-OH^2=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

よって AH の長さは $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$…… (答)

図1



（2） AE 上の点 P から OF におろした垂線の足を Q とする．P$(1,\ 0,\ t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とおく．

$\overrightarrow{OQ}=u\overrightarrow{OF}$ とおける．

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=u\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OP}$

が $\overrightarrow{OF}$ と垂直だから $(u\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{OF}=0$

$$u|\overrightarrow{OF}|^2-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OF}=0 \qquad \therefore \quad u=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OF}}{|\overrightarrow{OF}|^2}=\frac{1+t}{3}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1+t}{3}(1,\ 1,\ 1) \qquad \therefore \quad |\overrightarrow{OQ}|=\frac{1+t}{3}\sqrt{3}$$

$\angle OQP=90°$ だから三平方の定理より

$$PQ^2=OP^2-OQ^2=1+t^2-\frac{(1+t)^2}{3}$$

$OQ=s$ とおくと

$s=\dfrac{1+t}{3}\sqrt{3}$　　∴　$t=\sqrt{3}s-1$

$PQ^2=1+(\sqrt{3}s-1)^2-s^2=2s^2-2\sqrt{3}s+2$

$0\leqq t\leqq 1$ だから $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqq s\leqq\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(1)より $OH=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,　$AH^2=\dfrac{2}{3}$ である.

△OAH を回転してできる円錐を 2 つと, P を回転してできる立体の体積を考えて, 求める体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2+\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\pi PQ^2\,ds$$

$$=\frac{4}{27}\sqrt{3}\pi+\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}(2s^2-2\sqrt{3}s+2)ds$$

$$=\frac{4}{27}\sqrt{3}\pi+\pi\left[\frac{2}{3}s^3-\sqrt{3}s^2+2s\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

$$=\frac{4}{27}\sqrt{3}\pi+\pi\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{8\sqrt{3}}{9}-\frac{4}{3}\sqrt{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$-\pi\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{9}-\frac{1}{3}\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\cdots\cdots\text{(答)}$$

≪注≫　立体の概形は下図のようになり, AE を回転してできる部分は回転一葉双曲面と呼ばれる曲面です.

図2