$\boxed{1}$

（1）$a, b$ が相異なる正の実数であるとき，

$$a^3+b^3-(a^2b+b^2a)=(a-b)^2(a+b)>0$$

$$\therefore \quad a^3+b^3>a^2b+b^2a$$

が成り立つ．

（2）$a, b, c$ が相異なる正の実数であるとき，

$$\begin{aligned}&3(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\\&=2(a^3+b^3+c^3)-(a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b)\\&=\{(a^3+b^3)-(a^2b+b^2a)\}+\{(b^3+c^3)-(b^2c+c^2b)\}+\{(c^3+a^3)-(c^2a+a^2c)\}\\&>0 \qquad (\because \ (1))\end{aligned}$$

$$\therefore \quad 3(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \qquad \cdots\cdots ①$$

また，

$$\begin{aligned}&(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)(ab+bc+ca)\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\&=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}>0\end{aligned}$$

$$\therefore \quad (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)>(a+b+c)(ab+bc+ca) \qquad \cdots\cdots ②$$

さらに，(相加平均)≧(相乗平均)より，

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc \geqq 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}-9abc=0$$

であるが，$a, b, c$ が相異なる正の実数であることより，等号は成り立たないから，

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc>0$$

$$\therefore \quad (a+b+c)(ab+bc+ca)>9abc \qquad \cdots\cdots ③$$

以上① ～ ③より，与えられた4数を小さい順に並べると，

$$9abc,\ (a+b+c)(ab+bc+ca),\ (a+b+c)(a^2+b^2+c^2),\ 3(a^3+b^3+c^3)$$

となる．

（3） $x, y, z$ が正の実数であるとき，(相加平均) ≧(相乗平均)より，

$$\begin{aligned}\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}&=\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\\&\geqq 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}+2\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}}+2\sqrt{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{x}}\\&=6\end{aligned}$$

であり，等号は，

$$\frac{y}{x}=\frac{x}{y}\text{かつ}\frac{z}{y}=\frac{y}{z}\text{かつ}\frac{x}{z}=\frac{z}{x}\text{かつ}x,\ y,\ z\text{が正の実数}$$

であるとき，すなわち，

$$x=y=z>0$$

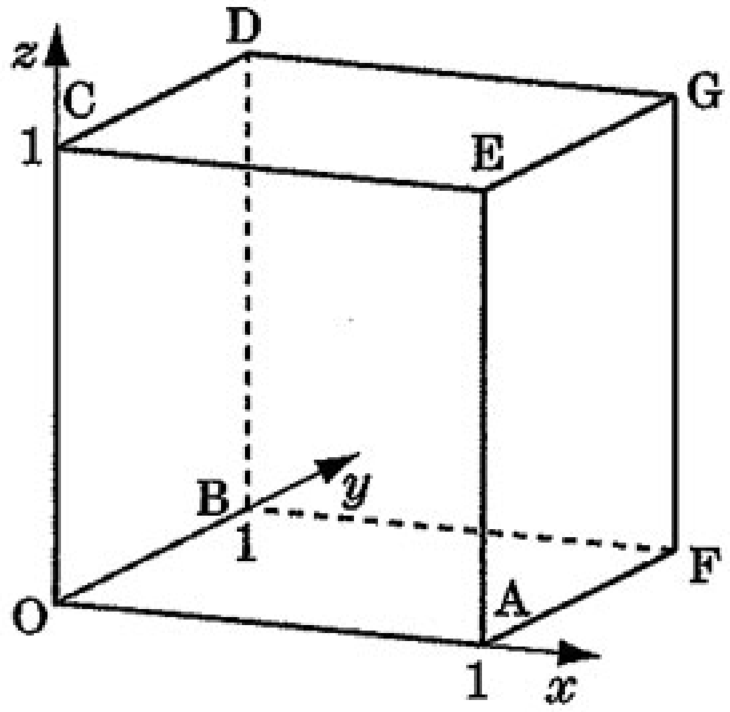
のとき成り立つ．このことと，$y$, $z$ を固定したとき，$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\right)=\infty$ となること

から，求める範囲は，

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\geqq 6$$

$\boxed{2}$

(1) $0<t\leqq 1$のとき，$\alpha_t(\mathrm{O}), \alpha_t(\mathrm{D})$は線分ODの垂直二等分面に関して反対側にあるから，これらの共通部分の体積は 0 である．同様に，$\alpha_t(\mathrm{O}), \alpha_t(\mathrm{D}), \alpha_t(\mathrm{E}), \alpha_t(\mathrm{F})$のどの 2 つの共通部分の体積も 0 である．また，$\alpha_t(\mathrm{O}), \alpha_t(\mathrm{D}), \alpha_t(\mathrm{E}), \alpha_t(\mathrm{F})$のそれぞれと$Q$の共通部分の体積はすべて，



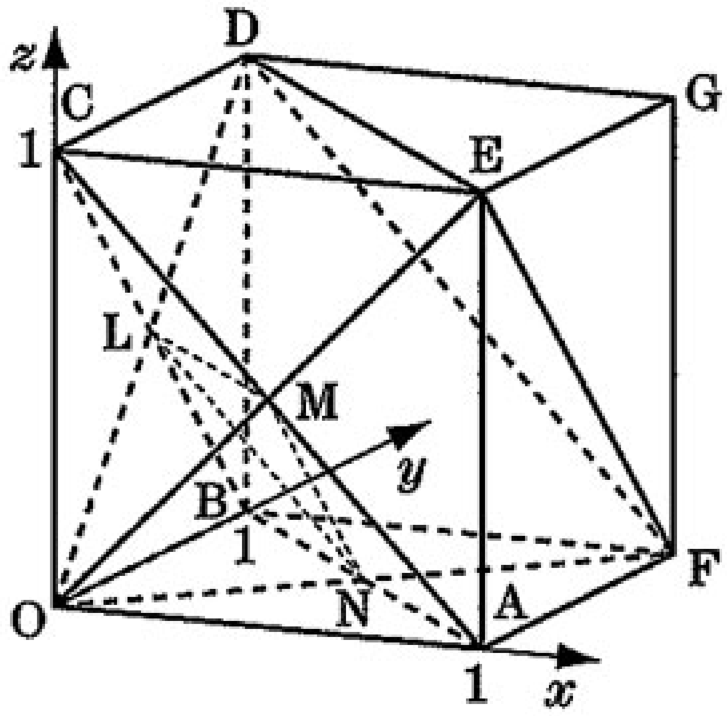

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}t^2\cdot t=\frac{1}{6}t^3$$

である．よって，求める体積を$V(t)$とおくと，

$$V(t)=1^3-4\cdot\frac{1}{6}t^3=1-\frac{2}{3}t^3$$

(2) $Q\cap\beta_1(\mathrm{A})\cap\beta_1(\mathrm{B})\cap\beta_1(\mathrm{C})$は，$Q$から 3 つの四面体AOEF，BOFD，CODEを取り除いたもの，すなわち，四面体ODEFと四面体DEFGの和集合である．

いま，$\alpha_1(\mathrm{O})$と四面体DEFGは線分OGの垂直二等分面に関して反対側にあるから，これらの共通部分の体積は0である．一方，ODとBC，OEとCA，OFとABの交点をそれぞれL, M, Nとすると，$\alpha_1(\mathrm{O})$と四面体ODEFの共通部分は四面体OLMNとなり，L, M, NがそれぞれOD, OE, OFの中点であることに注意すると，この四面体は，四面体ODEFをOを中心として$\frac{1}{2}$倍に相似拡大したものである．よって，四面体ODEFの体積が$V(1)$に等しいことに注意すると，求める体積は，



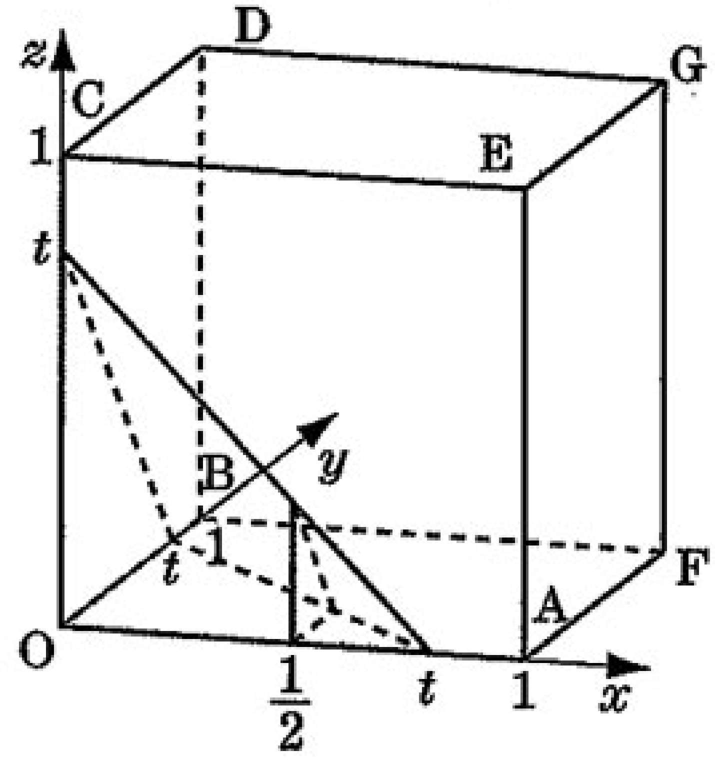

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3V(1)=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(1-\frac{2}{3}\cdot1^3\right)=\frac{1}{24}$$

(3)(i) $0<t\leqq\frac{1}{2}$のとき

(1)と同様に，垂直二等分面を用いた考察をすることにより，$\alpha_t(\mathrm{O}), \alpha_t(\mathrm{A}), \alpha_t(\mathrm{B}), \alpha_t(\mathrm{C}), \alpha_t(\mathrm{D}), \alpha_t(\mathrm{E}), \alpha_t(\mathrm{F}), \alpha_t(\mathrm{G})$のどの 2 つの共通部分の体積も 0 であることがわかるから，求める体積は，(1)と同様にして，

$$1^3-8\cdot\frac{1}{6}t^3=1-\frac{4}{3}t^3$$

(ⅱ) $\frac{1}{2}<t\leqq 1$のとき




$Q$および$\alpha_t(\mathrm{O})$, $\alpha_t(\mathrm{A})$の共通部分$\gamma$を考える.

$\alpha_t(\mathrm{O})$と$\alpha_t(\mathrm{A})$は平面$x=\frac{1}{2}$に関して対称であるから,

$\gamma$の体積は, $Q\cap\alpha_t(\mathrm{O})$の$x\geqq\frac{1}{2}$の部分の体積の2倍に等しく, $Q\cap\alpha_t(\mathrm{O})$の$x\geqq\frac{1}{2}$の部分と四面体OABCが相似で,

相似比が$t-\frac{1}{2}:1$であることより, $\gamma$の体積は,

$$2\times\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot 1\times\left(t-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{24}(2t-1)^3 \qquad \cdots\cdots①$$

XとYが$Q$の辺で結ばれた頂点であるときには, $Q\cap\alpha_t(\mathrm{X})\cap\alpha_t(\mathrm{Y})$の体積はすべて①である.

一方, XとYが$Q$の辺で結ばれた頂点でないときには, (1)と同様に垂直二等分面を用いた考察をすることにより, $\alpha_t(\mathrm{X})$と$\alpha_t(\mathrm{Y})$の共通部分の体積が0であることがわかる.

$Q$が12本の辺をもつことを考えると, $\gamma$と合同な共通部分が12個存在するから, 求める体積は, (ⅰ)の結果にこれら12個分の体積を加えたものであり,

$$\left(1-\frac{4}{3}t^3\right)+12\cdot\frac{1}{24}(2t-1)^3=1-\frac{4}{3}t^3+\frac{1}{2}(2t-1)^3$$

以上(ⅰ), (ⅱ)より, 求める体積は,

$$\begin{cases}1-\frac{4}{3}t^3 & \left(0<t\leqq\frac{1}{2}\right)\\ 1-\frac{4}{3}t^3+\frac{1}{2}(2t-1)^3 & \left(\frac{1}{2}<t\leqq 1\right)\end{cases}$$

3

（1）$l$ 上の任意の点を $Q(x, y)$ とおくと，$OP \perp PQ$ または $Q=P$ より，

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$$

$$\therefore\ s(x-s)+t(y-t)=0$$

であるから，$s^2+t^2=1$ ……①を用いると，

$$sx+ty=1$$

が成り立つ．これが $l$ の方程式である．

（2）$t>0$ のとき，$l$ の方程式は，

$$y=\frac{1}{t}(-sx+1)$$

と表せるから，$l$ と $E$ の共有点の $x$ 座標は，

$$x^2+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{t}(-sx+1)\right\}^2=1$$

$$\therefore\ (2t^2+s^2)x^2-2sx+1-2t^2=0$$

$$\therefore\ x=\frac{s\pm\sqrt{s^2-(2t^2+s^2)(1-2t^2)}}{2t^2+s^2}=\frac{s\pm\sqrt{2t^2(2t^2+s^2-1)}}{2t^2+s^2}$$

であり，$l$ の傾きが $-\frac{s}{t}$ であることも用いると，

$$L=\sqrt{1+\left(-\frac{s}{t}\right)^2}\left\{\frac{s+\sqrt{2t^2(2t^2+s^2-1)}}{2t^2+s^2}-\frac{s-\sqrt{2t^2(2t^2+s^2-1)}}{2t^2+s^2}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{t^2+s^2}{t^2}}\cdot\frac{2\sqrt{2t^2(2t^2+s^2-1)}}{2t^2+s^2}$$

$$=\sqrt{t^2+s^2}\cdot\frac{2\sqrt{2(2t^2+s^2-1)}}{2t^2+s^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{2t^2}}{t^2+1}\qquad(\because\ ①)$$

$$=\frac{2\sqrt{2}t}{t^2+1}\qquad(\because\ t>0)$$

(3) $t>0$ であるから，(相加平均) ≧ (相乗平均) より，

$$L=\frac{2\sqrt{2}t}{t^2+1}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}\leqq\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}}=\sqrt{2}$$

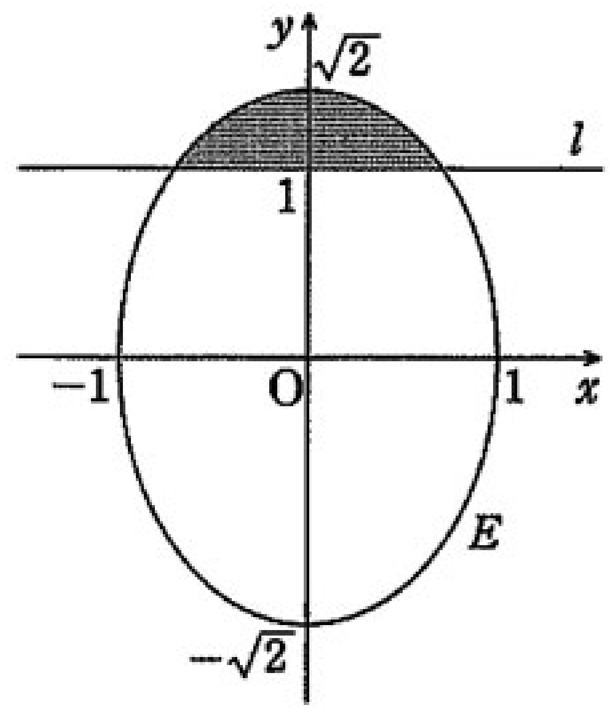
であり，等号は，

$$t=\frac{1}{t}\ \text{かつ}\ t>0\ \text{かつ}\ ①\qquad\therefore\ (s, t)=(0, 1)$$

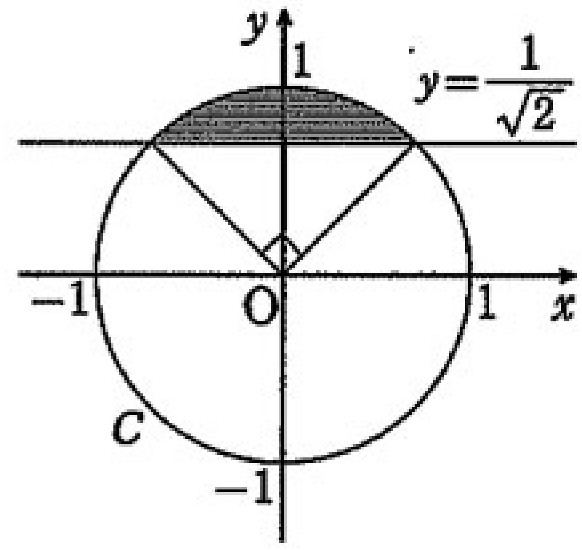
のとき成り立つから，$L$ の最大値は，

$$\sqrt{2}$$

(4) $L$が最大値をとるとき，$(s, t)=(0, 1)$ であるから，$l$の方程式は$y=1$となり，$l$と$E$が囲む領域のうち，原点を含まない領域は，右図の網目部分のようになる．




この楕円は単位円$C$を$y$軸方向に$\sqrt{2}$倍に拡大したものであるから，求める面積は，右下図の網目部分の面積を$\sqrt{2}$倍したものに等しい．




よって，

$$\sqrt{2}\left(\pi\cdot 1^2\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot 1^2\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$$