1

(1) $y=x^2$ のとき，$y'=2x$ より，点 $(t,\ t^2)$ における C_1 の接線は，

$$y=2t(x-t)+t^2 \Leftrightarrow y=2tx-t^2$$

となる．これが C_2 に接するとき，

$$x^2-4ax+4a=2tx-t^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-2(2a+t)x+(4a+t^2)=0 \cdots ①$$

の判別式$=0$ より，$(2a+t)^2-(4a+t^2)=0$

$$\therefore\ 4a(t+a-1)=0$$

$a>0$ であるから，$t=1-a$

よって，求める l の方程式は，$\boldsymbol{y=2(1-a)x-(1-a)^2}$

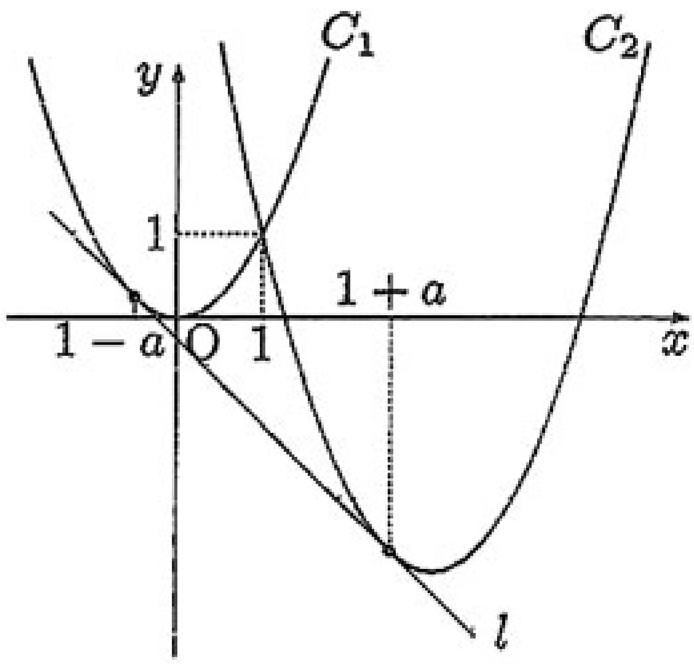
(2) C_2 と l の接点の x 座標は，①の重解であるから，

$$x=2a+t=2a+(1-a)=1+a$$

また，C_1，C_2 の交点の x 座標は，

$$x^2=x^2-4ax+4a$$

$$\therefore\ x=1$$



よって，C_1，C_2，l の位置関係は次のようになる．

求める面積を S とすると，

$$S=\int_{1-a}^{1}\{x^2-(2(1-a)x-(1-a)^2)\}\,dx$$

$$+\int_{1}^{1+a}\{x^2-4ax+4a-(2(1-a)x-(1-a)^2)\}\,dx$$

$$=\int_{1-a}^{1}\{x-(1-a)\}^2\,dx$$

$$+\int_{1}^{1+a}\{x-(1+a)\}^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\{x-(1-a)\}^3\right]_{1-a}^{1}+\left[\frac{1}{3}\{x-(1+a)\}^3\right]_{1}^{1+a}$$

$$=\frac{1}{3}a^3-\left(-\frac{1}{3}a^3\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}a^3}$$

2

(1) $A^2-A+E=O$ より，$A(A-E)=(A-E)A=-E$

$\therefore\ A(E-A)=(E-A)A=E$

よって，A は逆行列 $A^{-1}=E-A$ をもつ． （証明終り）

(2) ケーリー・ハミルトンの定理より，$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ …①

また，$A^2-A+E=O$ …②

①−②より，$(a+d-1)A=(ad-bc-1)E$ …③

$a+d-1\neq 0$ のとき，$A=kE$ (k は実数) と表せる．②へ代入すると，

$$k^2E-kE+E=O$$

$$\therefore\ (k^2-k+1)E=O$$

$$\therefore\ k^2-k+1=0$$

よって，$k=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ となるが，k は実数より不適．

$a+d-1=0$ のとき，③より $(ad-bc-1)E=O$

$\therefore\ ad-bc=1$

したがって，求める値は，$\boldsymbol{a+d=1}$，$\boldsymbol{ad-bc=1}$ である．

(3) (1) より $A^{-1}=E-A=\begin{pmatrix}1-a & -b\\ -c & 1-d\end{pmatrix}$ であるから，$A^{-1}=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ のとき，

$$\begin{pmatrix}1-a & -b\\ -c & 1-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$$

(1, 1) 成分より，$1-a=a$ $\quad\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$

(2, 2) 成分より，$1-d=d$ $\quad\therefore\ d=\dfrac{1}{2}$ $(a+d=1$ を満たす$)$

(1, 2) と (2, 1) 成分より，$c=-b$

これらを $ad-bc=1$ へ代入し，$\dfrac{1}{4}+b^2=1$ $\quad\therefore\ b^2=\dfrac{3}{4}$

$b>0$ より，$b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore\ c=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，求める A は，$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}}$ である．

3

(1) $a_1=\dfrac{a_0+b_0}{2}=\dfrac{r(\cos\theta+1)}{2}=r\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

$$b_1=\sqrt{a_1b_0}=\sqrt{r\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot r}==r\cos\frac{\theta}{2}\qquad\left(\begin{array}{c}\because\ r>0\\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\end{array}\right)$$

$$\therefore\qquad \frac{a_1}{b_1}=\frac{r\cos^2\frac{\theta}{2}}{r\cos\frac{\theta}{2}}=\cos\frac{\theta}{2}\qquad\cdots\text{(答)}$$

である。

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2}=\frac{r\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+1\right)}{2}=r\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{4}$$

$$b_2=\sqrt{a_2b_1}=\sqrt{r\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{4}\cdot r\cos\frac{\theta}{2}}=\sqrt{r^2\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{4}}=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}$$

$$\therefore\qquad \frac{a_2}{b_2}=\frac{r\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{4}}{r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}}=\cos\frac{\theta}{4}\qquad\cdots\text{(答)}$$

である。

(2) (1)より，$\dfrac{a_n}{b_n}=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$ $(n\geqq 1)$と推測する。

$a_0>0$,$b_0>0$ と漸化式より帰納的に$a_n>0$，$b_n>0$

である。

$n=1$ のとき，(1)より正しい。

$n=k$(kは自然数)で，$\dfrac{a_k}{b_k}=\cos\dfrac{\theta}{2^k}$ の成立を仮定すると，$a_k=b_k\cos\dfrac{\theta}{2^k}$

$$a_{k+1}=\frac{a_k+b_k}{2}=\frac{b_k\cos\frac{\theta}{2^k}+b_k}{2}=b_k\cdot\frac{1+\cos\frac{\theta}{2^k}}{2}=b_k\cos^2\frac{\theta}{2^{k+1}}$$

$$b_{k+1}=\sqrt{a_{k+1}b_k}=\sqrt{b_k\cos^2\frac{\theta}{2^{k+1}}\cdot b_k}=b_k\cos\frac{\theta}{2^{k+1}}\qquad\cdots\cdots①$$

$$\therefore\qquad \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}=\frac{b_k\cos^2\frac{\theta}{2^{k+1}}}{b_k\cos\frac{\theta}{2^{k+1}}}=\cos\frac{\theta}{2^{k+1}}$$

となり，$n=k+1$ のときも推測は正しい。

以上より，数学的帰納法により，すべての自然数nについて

$$\frac{a_n}{b_n}=\cos\frac{\theta}{2^n} \qquad \cdots\text{（答）}$$

である。

(3)　①より，　$b_{n+1}=b_n\cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}}$

これに，$n=0,1,2,3,\cdots$として，

$$b_1=b_0\cos\frac{\theta}{2},\ b_2=b_1\cos\frac{\theta}{2^2},\ b_3=b_2\cos\frac{\theta}{2^3},\ b_4=b_3\cos\frac{\theta}{2^4},\ \cdots,\ b_n=b_{n-1}\cos\frac{\theta}{2^n}$$

$$\therefore\quad b_n=r\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^3}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}\quad(n\geqq0)$$

ここで，両辺に$\sin\dfrac{\theta}{2^n}$を掛けると

$$\begin{aligned}\sin\frac{\theta}{2^n}b_n&=r\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^3}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\left(\cos\frac{\theta}{2^n}\cdot\sin\frac{\theta}{2^n}\right)\\&=r\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^3}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\\&=\frac{1}{2}r\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^3}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\left(\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\end{aligned}$$

これを繰り返し，

$$b_n\sin\frac{\theta}{2^n}=\frac{r}{2^n}\sin\theta$$

である。

$n\to\infty$ のとき　$\dfrac{\theta}{2^n}\to0$であるから，

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{r\sin\theta}{2^n\sin\dfrac{\theta}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{r\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\dfrac{\theta}{2^n}}{\sin\dfrac{\theta}{2^n}}=\frac{r\sin\theta}{\theta}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n\cdot\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}b_n\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}=\frac{r\sin\theta}{\theta}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{r\sin\theta}{\theta}$$

である。

4

(1) C_1, C_2 は積分定数とする.

$$I_1=\int te^t\,dt=te^t-\int e^t\,dt=te^t-e^t+C_1$$
$$=(t-1)e^t+C_1$$
$$I_2=\int t^2e^t\,dt=t^2e^t-\int 2te^t\,dt=t^2e^t-2I_1=(t^2-2t+2)e^t+2C_1$$
$$=(t^2-2t+2)e^t+C_2$$

(2) $0\leqq x\leqq 1$ のとき,

$0\leqq t\leqq x$ において, $|t-x|=-(t-x)$

$x\leqq t\leqq 1$ において, $|t-x|=t-x$

であるから,

$$f(x)=\int_0^1 e^{-|t-x|}t(1-t)\,dt$$
$$=\int_0^x e^{t-x}t(1-t)\,dt+\int_x^1 e^{-t+x}t(1-t)\,dt$$
$$=e^{-x}\int_0^x(t-t^2)e^t\,dt+e^x\int_x^1(t-t^2)e^{-t}\,dt$$
$$=e^{-x}\Big[(-t^2+3t-3)e^t\Big]_0^x+e^x\Big[(t^2+t+1)e^{-t}\Big]_x^1$$
$$=e^{-x}\{(-x^2+3x-3)e^x-(-3)\}+e^x\{3e^{-1}-(x^2+x+1)e^{-x}\}$$
$$=3e^{-x}+3e^{x-1}-2x^2+2x-4$$

(3) $$f'(x)=-3e^{-x}+3e^{x-1}-4x+2$$
$$f''(x)=3e^{-x}+3e^{x-1}-4$$

であるから,

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=-3e^{-\frac{1}{2}}+3e^{\frac{1}{2}-1}-4\cdot\frac{1}{2}+2=0$$
$$f''\left(\frac{1}{2}\right)=3e^{-\frac{1}{2}}+3e^{\frac{1}{2}-1}-4=\frac{6}{\sqrt{e}}-4=\frac{2(3-2\sqrt{e})}{\sqrt{e}}$$
$$<\frac{2(3-2\sqrt{2.5})}{\sqrt{e}}=\frac{2(\sqrt{9}-\sqrt{10})}{\sqrt{e}}<0$$

よって, $f(x)$ は $x=\dfrac{1}{2}$ で極大となる. （証明終り）

5

2本の当たりくじを含む102本のくじを一列に並べ，左からk本目 $(k=1,\ 2,\ ,\cdots 102)$ のくじがk回目に引いたくじ，と考える．

このとき，くじの並べ方は全部で ${}_{102}\mathrm{C}_2=\dfrac{102\cdot 101}{2}=51\cdot 101=5151$ 通りあり，これらは同様に確からしい．

(1) n回目に1本目の当たりくじが出るためには，くじの並びを

「左から1本目から$n-1$本目まではははずれ，n本目に当たり，そして，
$n+1$本目から102本目のどこかに2本目の当たりくじがくる」

ようにすればよいから，そのような並べ方は $102-n$ 通りある．

よって，求める確率は $\dfrac{102-n}{5151}$ $(1\leqq n\leqq 102)$ である．

(2) A, B, C が1本目の当たりくじを引く確率をそれぞれ P_A，P_B，P_C とおく．

1本目の当たりくじをAが引くのは，$3k-2$回目 $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 34)$ に1本目の当たりくじが出るときである．その確率は，(1) より $\dfrac{102-(3k-2)}{51\cdot 101}=\dfrac{104-3k}{51\cdot 101}$ となるから，

$$P_A=\sum_{k=1}^{34}\frac{104-3k}{51\cdot 101}=\frac{1}{51\cdot 101}(101+98+95+\cdots+5+2)$$
$$=\frac{1}{51\cdot 101}\cdot\frac{103\cdot 34}{2}=\mathbf{\frac{103}{303}}$$

である．次に，$3k-1$回目 $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 34)$ に1本目の当たりくじが出る確率は，同様に，$\dfrac{102-(3k-1)}{51\cdot 101}=\dfrac{103-3k}{51\cdot 101}$ となるから，

$$P_B=\sum_{k=1}^{34}\frac{103-3k}{51\cdot 101}=\frac{1}{51\cdot 101}(100+97+94+\cdots+4+1)$$
$$=\frac{1}{51\cdot 101}\cdot\frac{101\cdot 34}{2}=\frac{101}{303}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

である．よって，

$$P_C=1-P_A-P_B=1-\frac{204}{303}=\frac{99}{303}=\mathbf{\frac{33}{101}}$$

である．