1

(1) $y=x^2$ のとき，$y'=2x$ より，点 $(t,\ t^2)$ における C_1 の接線は，

$$y=2t(x-t)+t^2 \Leftrightarrow y=2tx-t^2$$

となる．これが C_2 に接するとき，

$$x^2-4ax+4a=2tx-t^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-2(2a+t)x+(4a+t^2)=0 \cdots ①$$

の判別式$=0$ より，$(2a+t)^2-(4a+t^2)=0$

$$\therefore\ 4a(t+a-1)=0$$

$a>0$ であるから，$t=1-a$

よって，求める l の方程式は，$\boldsymbol{y=2(1-a)x-(1-a)^2}$

(2) C_2 と l の接点の x 座標は，①の重解であるから，

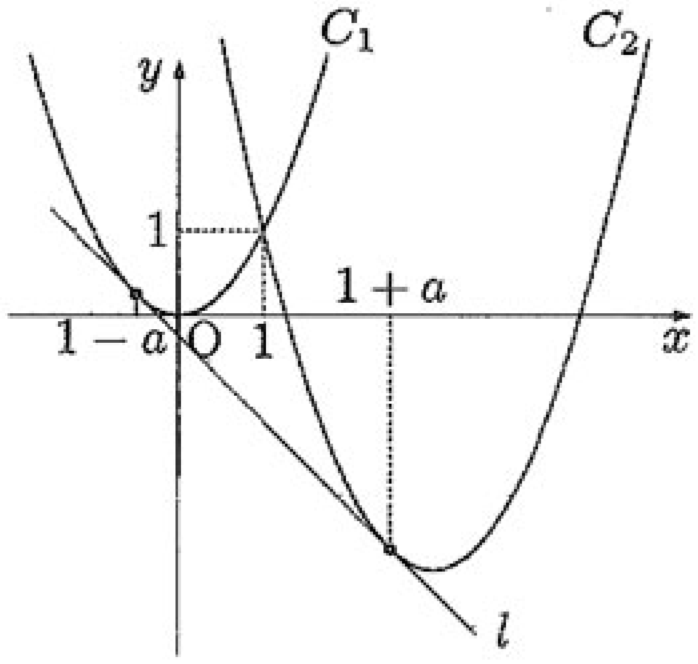
$$x=2a+t=2a+(1-a)=1+a$$

また，C_1，C_2 の交点の x 座標は，

$$x^2=x^2-4ax+4a$$

$$\therefore\ x=1$$

よって，C_1，C_2，l の位置関係は次のようになる．



求める面積を S とすると，

$$S=\int_{1-a}^{1}\{x^2-(2(1-a)x-(1-a)^2)\}\,dx$$

$$+\int_{1}^{1+a}\{x^2-4ax+4a-(2(1-a)x-(1-a)^2)\}\,dx$$

$$=\int_{1-a}^{1}\{x-(1-a)\}^2\,dx$$

$$+\int_{1}^{1+a}\{x-(1+a)\}^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\{x-(1-a)\}^3\right]_{1-a}^{1}+\left[\frac{1}{3}\{x-(1+a)\}^3\right]_{1}^{1+a}$$

$$=\frac{1}{3}a^3-\left(-\frac{1}{3}a^3\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}}a^3$$

2

(1)　AとBのさいころの目によって得点を表にすると下図のようになる。

A＼B	1	2	3	4	5	6
1	p	$q+2$	$q+3$	$q+4$	$q+5$	$q+6$
2	$2p$	$2p$	$2q+3$	$2q+4$	$2q+5$	$2q+6$
3	$3p$	$3p$	$3p$	$3q+4$	$3q+5$	$3q+6$
4	$4p$	$4p$	$4p$	$4p$	$4q+5$	$4q+6$
5	$5p$	$5p$	$5p$	$5p$	$5p$	$5q+6$
6	$6p$	$6p$	$6p$	$6p$	$6p$	$6p$

（太線枠内はAの得点
点線枠内はBの得点を表す）

各々の場合が起こる確率はどれも$\dfrac{1}{36}$であるから，

$E_A=\dfrac{1}{36}$(太線枠内の数の和)$=\dfrac{91}{36}p$　　　　…… (答)

$E_B=\dfrac{1}{36}$(点線枠内の数の和)$=\dfrac{1}{36}(35q+70)$　　　　…… (答)

(2)　$E_A=E_B \iff 91p=35q+70 \iff 13p=5(q+2)$　　……①

5と13は互いに素であるから，①より

$p=5t$，$q+2=13t$（tは整数）とおける。

$t=1$とすると，

$p=5,\quad q=11$

となり，p，qともに自然数となる。

よって，最小の自然数 p は

$p=5$　　　　…… (答)

である。

このとき，$E_A=\dfrac{455}{36}$　　　　…… (答)

3

(1) $k \geqq \mathbf{2}$ のとき，第 k 群の最初の項は，数列 $\{a_n\}$ の

$1+3+5+\cdots+(2k-3)+1=(k-1)^2+1$ 番目の項であるから

$$a_{(k-1)^2+1}=\frac{1}{\{(k-1)^2+1\}\{(k-1)^2+2\}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{(k^2-2k+2)(k^2-2k+3)}}$$

これは，$k=1$ のときも成り立つ.

(2) 第 k 群の最後の項は，数列 $\{a_n\}$ の

$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ 番目の項であるから

$$\begin{aligned}
S_k &= \sum_{n=(k-1)^2+1}^{k^2}\frac{1}{n(n+1)}\\
&= \sum_{n=(k-1)^2+1}^{k^2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \left\{\left(\frac{1}{(k-1)^2+1}-\frac{1}{(k-1)^2+2}\right)+\left(\frac{1}{(k-1)^2+2}-\frac{1}{(k-1)^2+3}\right)+\cdots\right.\\
&\qquad \left.+\left(\frac{1}{k^2-1}-\frac{1}{k^2}\right)+\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2+1}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{(k-1)^2+1}-\frac{1}{k^2+1}\\
&= \boldsymbol{\frac{2k-1}{(k^2-2k+2)(k^2+1)}}
\end{aligned}$$

(3)

$(k^2+1)S_k=\dfrac{2k-1}{k^2-2k+2}\leqq\dfrac{1}{100}$ より

$100(2k-1)\leqq k^2-2k+2$

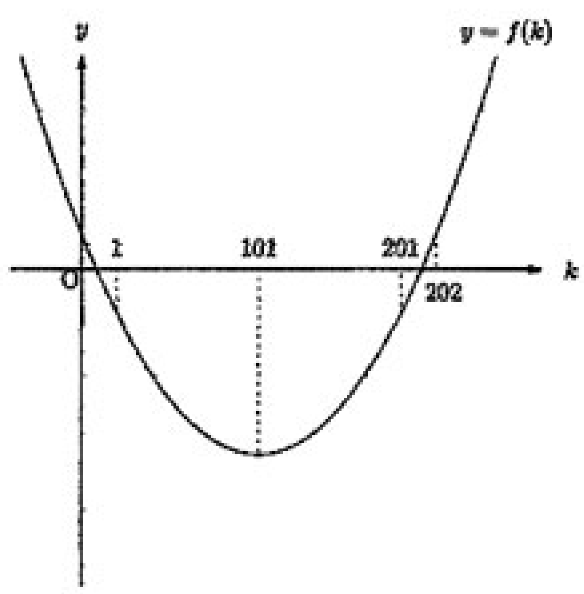
$\therefore\ k^2-202k+102\geqq 0\ \cdots$ ①

① の左辺を $f(k)$ とおくと，k の 2 次関数 $y=f(k)$ のグラフの軸は $k=101$ であることから，

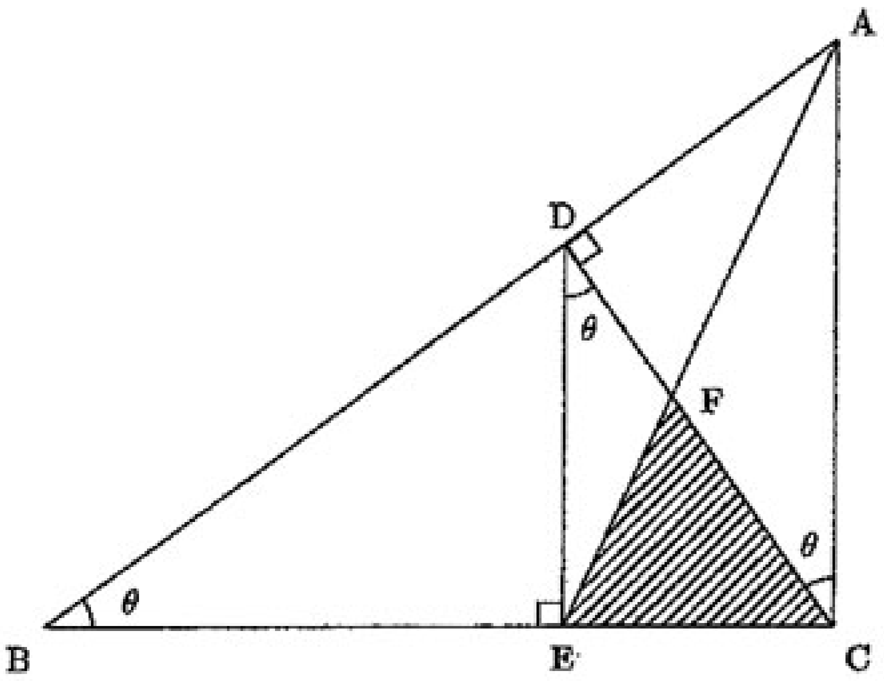
$f(0)=f(202)=102>0$

$f(1)=f(201)=-99<0$

したがって，求める最小の自然数 k は $\mathbf{202}$ である.



4



(1) $\mathrm{AC}=\sin\theta$, $\mathrm{BC}=\cos\theta$

$\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{CDE}=\theta$ であるから,

$\mathrm{CD}=\mathrm{AC}\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$

$\mathrm{CE}=\mathrm{CD}\sin\theta=\sin^2\theta\cos\theta$

$\mathrm{DE}=\mathrm{CD}\cos\theta=\sin\theta\cos^2\theta$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AC}}=\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{\sin\theta}=\boldsymbol{\cos^2\theta}$$

(2) $\angle\mathrm{AFC}=\angle\mathrm{EFD}$(対頂角) , $\angle\mathrm{ACF}=\angle\mathrm{EDF}=\theta$ より,

$\triangle\mathrm{ACF}$ と $\triangle\mathrm{EDF}$ は相似で, (1) より相似比は $1:\cos^2\theta$ である.

よって, $\mathrm{AF}:\mathrm{FE}=1:\cos^2\theta$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{FEC}&=\triangle\mathrm{ACE}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{AE}}\\&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CE}\cdot\frac{\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}\\&=\frac{1}{2}\cdot\sin\theta\cdot\sin^2\theta\cos\theta\cdot\frac{\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}\\&=\boldsymbol{\frac{\sin^3\theta\cos^3\theta}{2(1+\cos^2\theta)}}\end{aligned}$$