$\boxed{1}$ p, q, r, a, $b(\neq 0)$は実数であるから，$a+bi$が解であるとき，$a-bi$も解である.

解と係数の関係より，

$$\begin{cases}(a+bi)+(a-bi)+c=-p\\(a+bi)(a-bi)+\{(a+bi)+(a-bi)\}c=q\\(a+bi)(a-bi)c=-r\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}p=-2a-c & \cdots①\\q=a^2+b^2+2ac & \cdots②\\r=-(a^2+b^2)c & \cdots③\end{cases}$$

となる.

(1) $f'(x)=3x^2+2px+q$ であるから，

$$s(c)-s(a)=f'(c)-f'(a)=3(c^2-a^2)+2p(c-a)$$
$$=(c-a)\{3(c+a)+2p\}$$

よって，①および，$a\neq c$より，

$$s(c)-s(a)=(c-a)\{3(c+a)+2(-2a-c)\}=(c-a)^2>0$$

$\therefore\quad s(c)>s(a)$ …(答)

(2) (i) ①，②，③より，a, b, c がすべて整数であるとき，p, q, r はすべて整数である.

(ii) k, lを整数として，$p=2k$，$q=4l$とおく．①より，

$$c=2(-a-k)$$

となり，cは2の倍数である．このとき，②より，

$$a^2+b^2=q-2ac=4(l+a^2+ak)$$

となり，a^2+b^2は4の倍数である.

一般に，“奇数$2m+1$の平方は，$(2m+1)^2=4(m^2+m)+1$であり，4 で割った余りは1. 偶数$2m$の平方は，$(2m)^2=4m^2$であり，4の倍数となる.”…(*)

a, bを偶奇で分類すると，

$(a,b)=$(偶数，偶数)，(偶数，奇数)，(奇数，偶数)，(奇数，奇数)

のいずれかであるが，(*)に注意すると，この中でa^2+b^2が4の倍数となるものは，aとbが共に偶数となるときだけである.

以上から，a, b, cはすべて2の倍数となる.

$\boxed{2}$　$f(x)=x^3-3ax^2$ とおくと，$f'(x)=3x^2-6ax$

(1)　A，B の x 座標をそれぞれ s，$t\ (s\neq t)$ とおく．A，B における接線の傾きがともに m であることから，

$$(m=)f'(s)=f'(t) \qquad \therefore\quad 3s^2-6as=3t^2-6at$$

$$\therefore\quad (s-t)(s+t-2a)=0$$

$s\neq t$ であるから，$s+t=2a$ となる．

したがって，線分 AB の中点 C(x, y) の座標は，

$$x=\frac{s+t}{2}=a$$

$$y=\frac{f(s)+f(t)}{2}=\frac{s^3+t^3-3a(s^2+t^2)}{2}$$

$$=\frac{(s+t)^3-3st(s+t)-3a\{(s+t)^2-2st\}}{2}$$

$$=\frac{(2a)^3-3st\cdot 2a-3a\{(2a)^2-2st\}}{2}=-2a^3$$

よって，C$(a, -2a^3)$ となる．

$f(a)=-2a^3$ であるから，C は曲線 $y=f(x)$ 上にある．

(2)　$y=f(x)$ と $y=-x-1$ との交点が A，B，C となる．$y=-x-1$ が C$(a, -2a^3)$ を通ることから，

$$-2a^3=-a-1 \qquad \therefore\quad (a-1)(2a^2+2a+1)=0$$

a は実数であるから，$a=1$ となる．　…(答)

このとき，$f(x)=x^3-3x^2$ であり，$y=-x-1$ と連立して，

$$x^3-3x^2=-x-1 \qquad \therefore\quad (x-1)(x^2-2x-1)=0$$

C の x 座標は，$x=a=1$ であるから，A の x 座標は $x^2-2x-1=0$ の解であり，$s^2-2s=1$ となる．

$f'(x)=3x^2-6x=3(x^2-2x)$ より，

$$m=f'(s)=3(s^2-2s)=3 \qquad \text{…(答)}$$

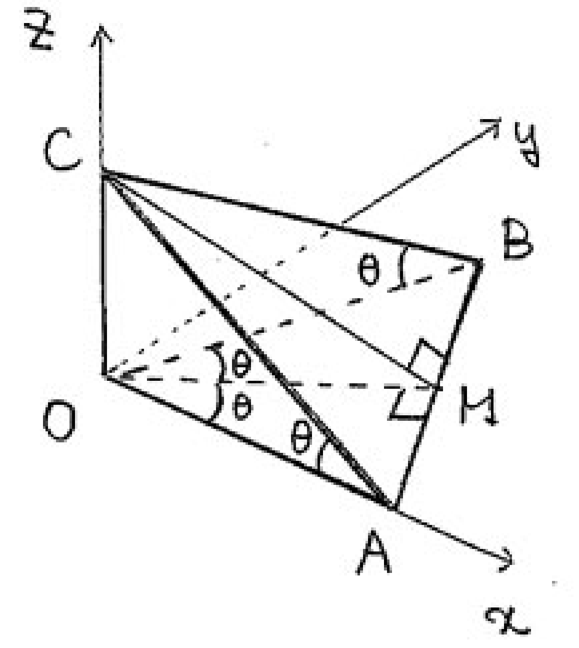
である．

$\boxed{3}$ (1) $\angle OAC = \angle OBC = \theta$ より，

$$OA = OB = \frac{OC}{\tan\theta}$$

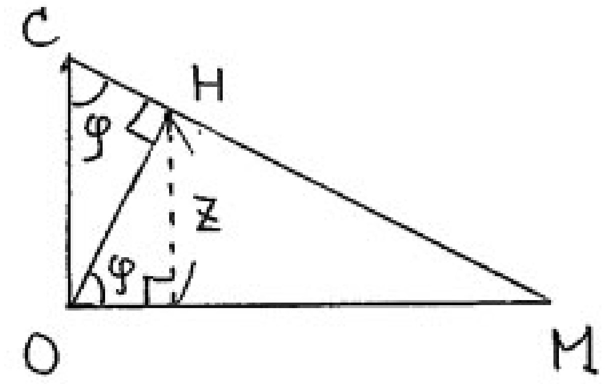
となる．

辺 AB の中点を M とする．$\triangle OAC \equiv \triangle OBC$ より，$\triangle ABC$ は $CA = CB$ の二等辺三角形であり，$\triangle OAB$ も二等辺三角形であるから，四面体 OABC は面 OCM に関して対称である．



このことと，H は O から面 ABC に下ろした垂線の足であることから，H は CM 上にある．

$\angle OCM = \varphi$ とすると，



$$\sin\varphi = \frac{OM}{CM} = \frac{OM}{\sqrt{OC^2 + OM^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{OC}{OM}\right)^2 + 1}}$$

ここで，

$$OM = OA\cos\theta = \frac{OC}{\tan\theta} \cdot \cos\theta = OC \cdot \frac{\cos\theta}{\tan\theta}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{OC}{OM}\right)^2 = \left(\frac{\tan\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \tan^2\theta \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta(\tan^2\theta + 1) = t^4 + t^2$$

であるから，

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$$

したがって，

$$OH = OC\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $\angle HOM = \angle OCM = \varphi$ であるから，H の z 座標は，

$$z = OH\sin\varphi = \frac{3}{t^4 + t^2 + 1} \qquad \cdots(\text{答})$$

$\boxed{4}$ $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ …①

(1) $\{a_n\}$の一の位を調べる．

a_n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
a_nの一の位	1	2	8	0	8	8	6	4	0	4

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
4	8	2	0	2	2	4	6	0	6	6	2	8

(a_{22}の一の位)=(a_2の一の位)，(a_{23}の一の位)=(a_3の一の位)であるから，①より，$a_n(n\geqq 2)$の一の位は，周期20で，

$$2,8,0,8,8,6,4,0,4,4,8,2,0,2,2,4,6,0,6,6 \quad \cdots②$$

が繰り返し現れる．

2010＝1＋(20・100＋9)であるから，a_{2010}を10で割った余りは，②の9番目で4となる． …(答)

(2) $a_2=3a_1$より，①から，

$$a_3=9a_1=3^2a_1,\ a_4=27a_1=3^3a_1,\ a_5=81a_1=3^4a_1$$

であるから，$a_n=3^{n-1}a_1$…(*) と推定される．これが正しいことを数学的帰納法を用いて示す．

I．$n=1,2$のとき，上の計算により，(*)は成立する．

II．$n=k,k+1\,(k\geqq 1)$のとき，(*)が成り立つと仮定すると，

$$a_k=3^{k-1}a_1,\ a_{k+1}=3^ka_1$$

であるから，①より，

$$a_{k+2}=a_{k+1}+6a_k=3^ka_1+6\cdot 3^{k-1}a_1=(1+2)\cdot 3^ka_1=3^{k+1}a_1$$

となり，$n=k+2$のときも(*)は成立する．

以上，I，IIより，すべてのnに対して(*)は成立する．

したがって，

$$a_{n+4}-a_n=3^{n+3}a_1-3^{n-1}a_1=(3^4-1)\cdot 3^{n-1}a_1=80\cdot 3^{n-1}a_1$$

よって，$a_{n+4}-a_n$は10の倍数となる．

$\boxed{5}$　$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の順列の総数は 6^n 通りあり，これらは同様に確からしい．

(1)　余事象を考える．$A_2, A_3, \cdots, A_n$ が 1 つも起こらないのは，順列 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の隣り合う 2 数がすべて異なるときであり，$6 \cdot 5^{n-1}$ 通りある．

したがって，求める確率は，

$$p_n = 1 - \frac{6 \cdot 5^{n-1}}{6^n} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)　余事象は，$A_2, A_3, \cdots, A_n$ が 1 つも起こらないか，または 1 つだけ起こる場合である．

$A_2, A_3, \cdots, A_n$ が 1 つだけ起こる場合を考える．どの A_i $(2 \leqq i \leqq n)$ が起こるかで $n-1$ 通りあり，たとえば A_2 だけが起こる．すなわち，$X_1 = X_2$ かつ $X_i \neq X_{i-1}$ $(3 \leqq i \leqq n)$ となるのは，$6 \cdot 1 \cdot 5^{n-2}$ 通りある．他の場合も同様であるから，

$$(n-1) \cdot 6 \cdot 1 \cdot 5^{n-2} \text{通り}$$

ある．

したがって，求める確率は

$$q_n = 1 - \frac{6 \cdot 5^{n-1} + (n-1) \cdot 6 \cdot 5^{n-2}}{6^n} = 1 - \frac{n+4}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \qquad \cdots(\text{答})$$