$\boxed{1}$

(1) $\mathrm{AB}=c$, $\mathrm{CA}=b$ とおくと, 条件よりこれらは正の整数である. 三平方の定理から

$$p=\sqrt{c^2-b^2} \Longleftrightarrow p^2=(c-b)(c+b)$$

であり,

$$1 \leqq c-b < c+b \quad \text{かつ} \quad p \text{は奇素数}$$

であるから,

$$c-b=1,\ c+b=p^2 \Longleftrightarrow c=\frac{p^2+1}{2},\ b=\frac{p^2-1}{2}$$

である. p は奇素数であるから, これらは確かに正の整数である.

$$\mathrm{AB}=\frac{p^2+1}{2}, \quad \mathrm{CA}=\frac{p^2-1}{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) $\tan\angle\mathrm{A}=\dfrac{p}{b}=\dfrac{2p}{p^2-1}$ であり, $p \geqq 3$ より, これは正値である. さらに

$$1-\tan\angle\mathrm{A}=1-\frac{2p}{p^2-1}=\frac{(p-1)^2-2}{p^2-1}>0 \quad (\because p \geqq 3)$$

であるから, 結局

$$0<\tan\angle A<1$$

を得る. したがって, $\tan\angle\mathrm{A}$ は整数ではない.
同様にして,

$$\tan\angle\mathrm{B}=\frac{b}{p}=\frac{p^2-1}{2p}=\frac{p-1}{2}+\frac{p-1}{2p} \quad \cdots(*)$$

であり, p が奇素数であるから $\dfrac{p-1}{2}$ は整数である.
一方, $p \geqq 3$ によって

$$0<\frac{p-1}{2p}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}<\frac{1}{2}<1$$

と評価されるから, $(*)$ によって $\tan\angle\mathrm{B}$ は整数ではない.

(別解)(2) $\tan\angle\mathrm{B}=\dfrac{(p+1)(p-1)}{2p}$ において, p が奇素数であるから, 分子の $p+1$ と $p-1$ とはともに偶数である. したがって, $\tan\angle\mathrm{B}$ が整数でないことを云うには,

$$(p+1)(p-1) \text{ が } p \text{ で割り切れない}$$

ことを示せばよい. しかるに, p と $p+1$;　p と $p-1$ とは互いに素である. ゆえに $p+1$ は p で割り切れず, $p-1$ は p で割り切れない. また, p が奇素数であるから, 結局, $(p+1)(p-1)$ は p で割り切れない. すなわち, $\tan\angle\mathrm{B}$ は整数ではない.
$\tan\angle\mathrm{A}=\dfrac{2p}{(p+1)(p-1)}$ が整数でないことも全く同様に示すことができる.

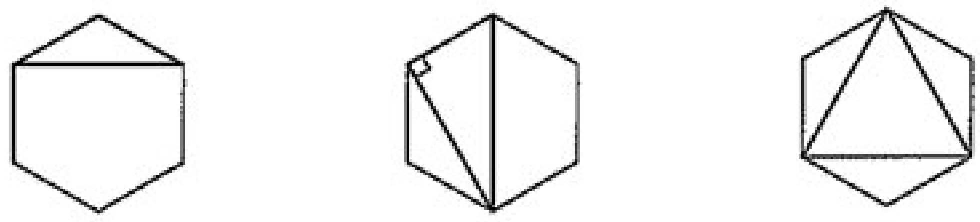
$\boxed{2}$

さいころを3回投げるとき, 目の出方は全部で $6^3 = 216$ 通りあって, これらは等確率で起こる.
このうち得点が0点となる場合は,

- 3回とも同じ目が出る場合 $\cdots 6$ 通り

- 2種類の目が出る場合 $\cdots {}_6P_2 \times 3 = 90$ 通り

である.
そうでない場合は, 次表のような三角形が出来る.



三角形の形状	面積	起こり得る場合の数
鈍角三角形	$\frac{1}{2} \cdot 2^2 \sin 120^\circ = \sqrt{3}$	$6 \times 3! = 36$
直角三角形	$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$	$12 \times 3! = 72$
正三角形	$\frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{3})^2 \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$	$2 \times 3! = 36$

したがって得点 X の確率分布は次表のとおりである.

X	0	3	12	27	合計
P	$\frac{96}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{72}{216}$	$\frac{12}{216}$	1

よって

(1) $X = 0$ の確率は,

$$P(0) = \frac{96}{216} = \frac{4}{9} \qquad \cdots\cdots(答)$$

であり,

(2) $X = 27$ の確率は,

$$P(27) = \frac{12}{216} = \frac{1}{18} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.

(3) 得点 X の期待値 $E(X)$ は,

$$E(X) = 0 \times \frac{4}{9} + 3 \times \frac{1}{6} + 12 \times \frac{1}{3} + 27 \times \frac{1}{18} = 6 \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.

$\boxed{3}$

$\triangle$ABC の辺の長さを $\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$, 面積を S, 内接円半径を r, 外接円半径を R とおく.
面積は次の 5 とおりに表示できる.

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot a=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot b=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot c=\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{abc}{4R}\quad\cdots(*)$$

はじめの 3 個の関係式から

$$a=2S,\quad b=\sqrt{2}S,\quad c=S$$

であり, これを第 4 式に代入して

$$S=\frac{1}{2}r(2S+\sqrt{2}S+S)\iff r=\frac{2}{7}(3-\sqrt{2})\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

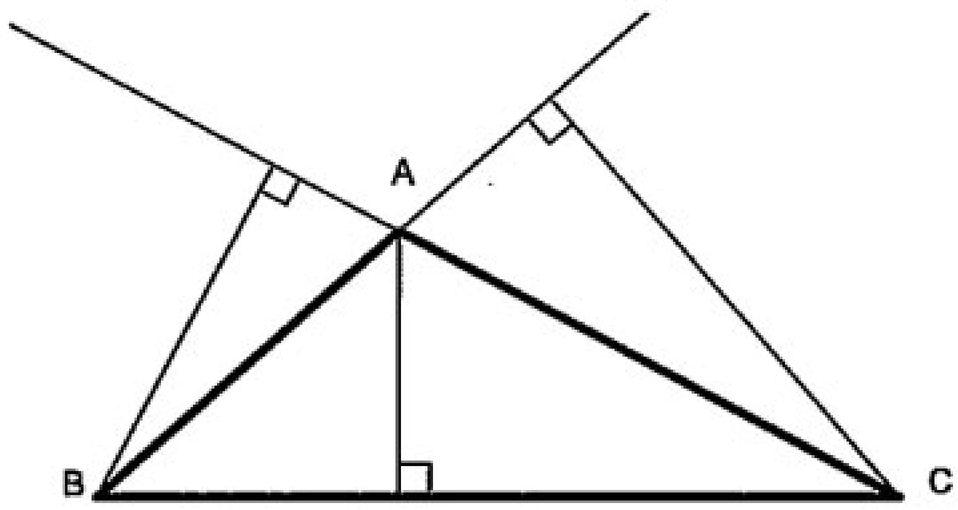
また, 辺 BC の長さに注目して, $S>0$ の下で

$$\begin{aligned}a=\sqrt{b^2-1}+\sqrt{c^2-1}\quad&\iff\quad 2S=\sqrt{S^2-1}+\sqrt{2S^2-1}\\&\iff\quad S^2+2=2\sqrt{(S^2-1)(2S^2-1)}\\&\iff\quad 7S^4-16S^2=0\\&\iff\quad S=\frac{4}{\sqrt{7}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である. これを $(*)$ の第 5 式に代入して

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{2S\cdot\sqrt{2}S\cdot S}{4S}=\frac{S^2}{\sqrt{2}}=\frac{8}{7}\sqrt{2}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である.



$\boxed{4}$

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x)=x^2+a(x-2)+\dfrac{a^2}{4}=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+2a & (x\in I_1=\{x|\ x\leqq 2\}) \\ f_2(x)=x^2-a(x-2)+\dfrac{a^2}{4}=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+2a & (x\in I_2=\{x|\ x\geqq 2\}) \end{cases}$$

$x=\pm\dfrac{a}{2}$ が区間 I_1, I_2 に属するか否かで分類してゆく．f の最小値を m とおく．また，記号 $\min\{b,c\}$ で2者のうち大きくない方を選択することを表す．

1° $a\leqq -4$ の場合．

$-\dfrac{a}{2}\notin I_1$ であるから f_1 は区間 I_1 において減少し，また $\dfrac{a}{2}\notin I_2$ であるから f_2 は区間 I_2 において増加である．したがって f は $x=2$ において最小となり，

$$m=f(2)=4+\frac{a^2}{4}$$

である．

2° $-4\leqq a\leqq 4$ の場合．

$-\dfrac{a}{2}\in I_1$ であるから f_1 は $x=-\dfrac{a}{2}$ において最小となり，$\dfrac{a}{2}\notin I_2$ であるから f_2 は区間 I_2 の端点 $x=2$ で最小となる．したがって，f の最小値はこれらを比較して，

$$m=\min\left\{f_1\left(-\frac{a}{2}\right),\ f_2(2)\right\}=\min\left\{-2a,\ 4+\frac{a^2}{4}\right\}=-2a$$

である．

3° $a\geqq 4$ の場合．

$-\dfrac{a}{2}\in I_1$ であるから f_1 は $x=-\dfrac{a}{2}$ において最小となり，$\dfrac{a}{2}\in I_2$ であるから f_2 は $x=\dfrac{a}{2}$ において最小となる．したがって，f の最小値はこれらを比較して，

$$m=\min\left\{f\left(-\frac{a}{2}\right),\ f\left(\frac{a}{2}\right)\right\}=\min\{-2a,\ 2a\}=-2a$$

である．

以上によって，求める最小値 m は

$$m=\begin{cases} 4+\dfrac{a^2}{4} & (a\leqq -4) \\ -2a & (a\geqq -4) \end{cases}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

5

（1） $a=0$ のとき，直線は $y=b$ であり，

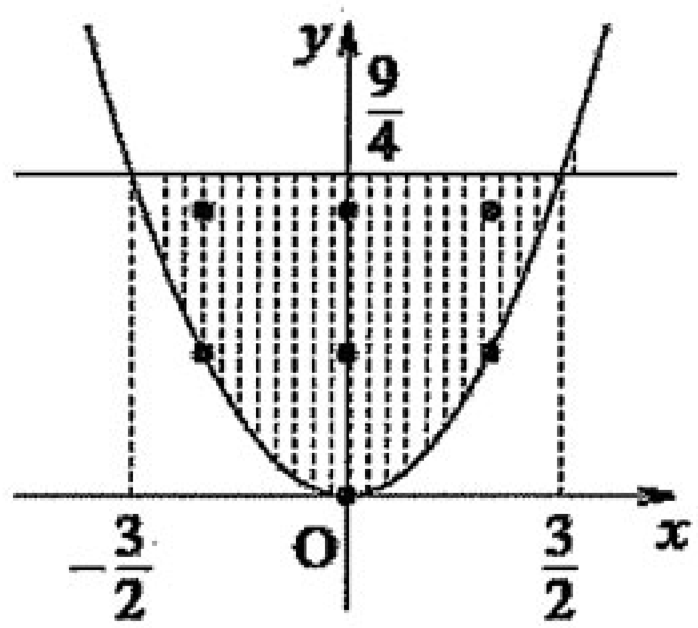
D の面積は，$\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}}(b-x^2)\,dx=\dfrac{1}{6}(2\sqrt{b})^3=\dfrac{4}{3}b^{\frac{3}{2}}$ となる。

よって，$\dfrac{4}{3}b^{\frac{3}{2}}=\dfrac{9}{2}$ として，$b^{\frac{3}{2}}=\dfrac{27}{8}$ $\therefore b=\dfrac{9}{4}$

このとき，領域 D（図の斜線部分および境界）に含まれる格子点の個数は，

直線 $x=0$ 上に3個，直線 $x=1$，$x=-1$ 上にはそれぞれ2個ずつあるから，

合計すると，$3+2+2=7$ 個 （答）



（2） 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=ax+b$ の2つの交点の x 座標を $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とする。

D の面積は，$\int_{\alpha}^{\beta}(ax+b-x^2)\,dx=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ である。

$\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\dfrac{9}{2}$ として，$(\beta-\alpha)^3=27$ $\therefore \beta-\alpha=3$ ①

さて，α,β は2次方程式 $x^2-ax-b=0$ の2解であるから，

$\alpha+\beta=a$ ② $\alpha\beta=-b$ ③

が成り立つ。①，② から，

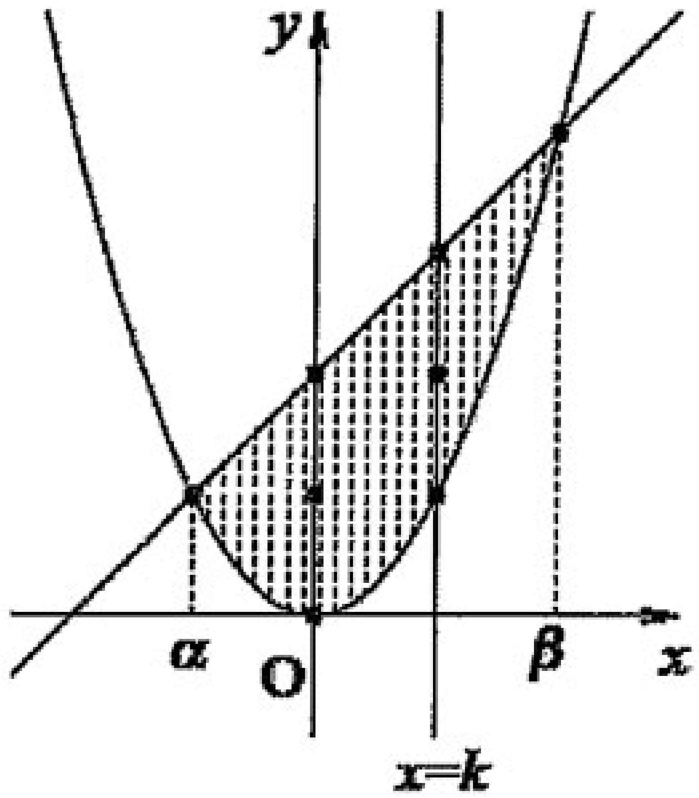
$\alpha=\dfrac{a-3}{2}$，$\beta=\dfrac{a+3}{2}$ ④

また，$\alpha\beta=\dfrac{a^2-9}{4}$ ⑤

となる。ここで，b は整数だから，③より，$\alpha\beta$ も整数であり，

⑤より，a^2-9は4の倍数，したがって，偶数であるから，aは奇数である。

よって，④より得られるα, βはともに整数であることがわかる。



領域Dの直線$x=k$ 上には格子点が$ak+b-k^2+1$（個）存在するから，

Dに含まれる格子点の総数Nは，$k=\alpha, \alpha+1, \alpha+2, \alpha+3$としてこれを加えて，

$$N=a(4\alpha+6)+4(b+1)-\left\{\alpha^2+(\alpha+1)^2+(\alpha+2)^2+(\alpha+3)\right\}$$

ここで，$\alpha=\dfrac{a-3}{2}$

また，③，⑤から，$4b=9-a^2$　として，

$$N=a\cdot 2a+9-a^2+4-\left\{(a-3)^2+6(a-3)+14\right\}$$

$$=(a^2+13)-(a^2+5)=8$$

よって，　Nはa, bの値によらず一定である。

$\boxed{6}$

サイコロを１回振ったとき

$$\begin{cases} \text{奇数の出る確率} \quad \cdots\cdots \quad \dfrac{1}{2} \quad \cdots\cdots \quad +1 \\ \text{偶数の出る確率} \quad \cdots\cdots \quad \dfrac{1}{2} \quad \cdots\cdots \quad -1 \end{cases}$$

(1) 点の座標が０であるのは，奇数の目と偶数の目が同じ回数出たときだから，ともに５回ずつのとき

$${}_{10}C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{63}{256}$$ ……（答）

(2) 奇数の目が出ることをA，偶数の目がでることをBで表すと

(i) １回目が奇数のとき

A　A　A　B　B　B
A　A　B　A　B　B　の２通り

(ii) １回目が偶数のときも同様に２通り

これから，$$\left(\frac{1}{2}\right)^6\times2\times2=\frac{1}{16}$$ ……（答）

(3) (2)と同様に

(i) １回目が奇数のとき

1	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B
2	A	A	A	A	B	A	B	B	B	B
3	A	A	A	A	B	B	A	B	B	B
4	A	A	A	A	B	B	B	A	B	B
5	A	A	A	B	A	A	B	B	B	B
6	A	A	A	B	A	B	A	B	B	B
7	A	A	A	B	A	B	B	A	B	B
8	A	A	A	B	B	A	A	B	B	B
9	A	A	A	B	B	A	B	A	B	B
10	A	A	B	A	A	A	B	B	B	B
11	A	A	B	A	A	B	A	B	B	B
12	A	A	B	A	A	B	B	A	B	B
13	A	A	B	A	B	A	A	B	B	B
14	A	A	B	A	B	A	B	A	B	B

の14通り

(ii) １回目が偶数の場合も同様に14通り

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\times14\times2=\frac{7}{256}$$ ……（答）

(注)

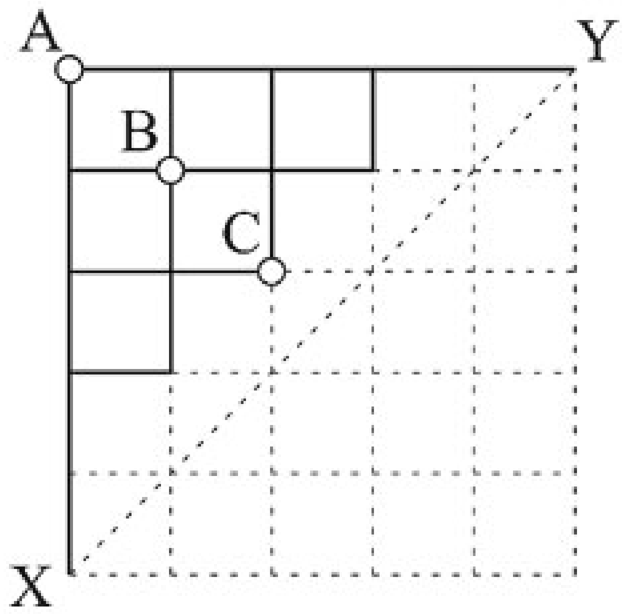
これは，点 X から点 Y へ行く最短経路の問題において対角線上の点を通らないで行く経路を求めることに対応する.

$X \to A \to Y$ は 1 通り

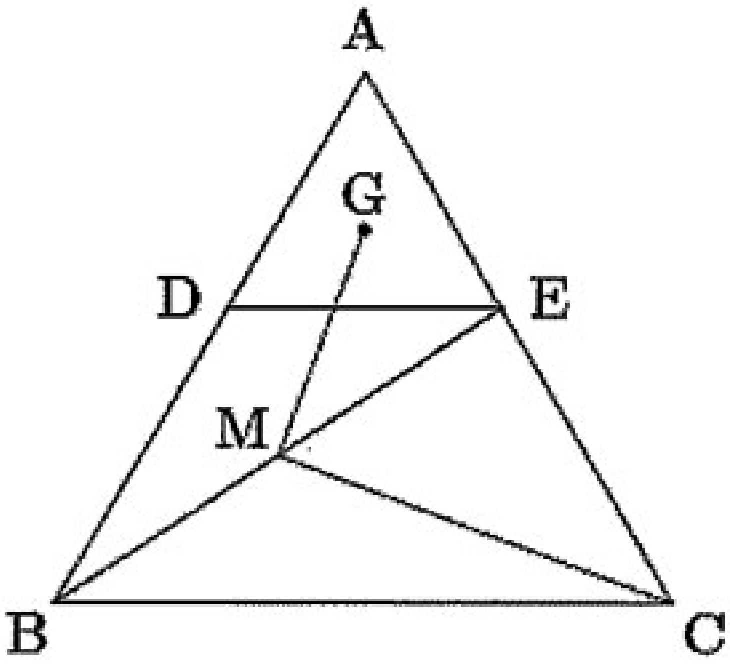
$X \to B \to Y$ は $3^2 = 9$ 通り

$X \to C \to Y$ は $2^2 = 4$ 通り

よって，$(1 + 9 + 4) \times 2 = 28$ と求めることができる.



$\boxed{7}$



(1) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=\frac{t}{3}(\vec{b}+\vec{c})$

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})=\frac{1}{2}(\vec{b}+t\,\vec{c})$ であるから,

$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}=\left\{\vec{c}-\frac{1}{2}(\vec{b}+t\,\vec{c})\right\}=(1-\frac{t}{2})\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AM}=\left\{\frac{t}{3}(\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{2}(\vec{b}+t\,\vec{c})\right\}=(\frac{t}{3}-\frac{1}{2})\vec{b}-\frac{t}{6}\vec{c}$

となる。

ここで, $|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}$ であるから,

$$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MG}=\left\{(1-\frac{t}{2})\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\right\}\cdot\left\{(\frac{t}{3}-\frac{1}{2})\vec{b}-\frac{t}{6}\vec{c}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{t}{2})(\frac{t}{3}-\frac{1}{2})-(1-\frac{t}{2})\frac{t}{6}-\frac{1}{2}(\frac{t}{3}-\frac{1}{2})+\frac{t}{12}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=(-\frac{1}{12}+\frac{1}{12})t^2+(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24})t+(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4})$$

$=0$ (答)

(2) $|\overrightarrow{MC}|^2=|(1-\frac{t}{2})\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}|^2=(1-\frac{t}{2})^2-(1-\frac{t}{2})\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(t^2-3t+3)$

$|\overrightarrow{MG}|^2=(\frac{t}{3}-\frac{1}{2})^2-\frac{t}{12}(\frac{t}{3}-\frac{1}{2})+\frac{t^2}{36}=\frac{1}{12}(t^2-3t+3)$

(1) より, MC⊥MG であるから,

$$\triangle\mathrm{OGM}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{MC}|\cdot|\overrightarrow{MG}|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{48}(t^2-3t+3)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\sqrt{3}}|t^2-3t+3|=\frac{1}{8\sqrt{3}}(t^2-3t+3)$$

ここで, $t^2-3t+3=(t-\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}$ は, $t=\frac{3}{2}$ のとき, 最小値 $\frac{3}{4}$ をとるから,

t が正の実数全体を動くときの△OGM の最小値は,

$t=\frac{3}{2}$ のとき, $\frac{\sqrt{3}}{32}$ (答)

$\boxed{8}$

まず,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_{-\pi}^{\pi}=0 \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{2}\cos 2x\Big]_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\Big[x-\frac{1}{2}\sin x\Big]_{-\pi}^{\pi}=\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\Big[x+\frac{1}{2}\sin x\Big]_{-\pi}^{\pi}=\pi$$

に注意する.

$$f(x)=a\sin x+b\cos x+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos t\,dt$$

において $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos t\,dt=c$ とおくと $f(x)=a\sin x+b\cos x+c$ となるから

$$\begin{aligned}c &= \int_{-\pi}^{\pi}(a\sin t+b\cos t+c)\cos t\,dt\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}(a\ \sin t\cos t+b\ \cos^2 t+c\ \cos t)\ dt\\ &= \pi b\end{aligned}$$

より $f(x)=a\ \sin x+b\ \cos x+\pi b=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\,x+\alpha\,)+\pi b$ ただし,

α は $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす定角

そこで, $f(x)$ の $-\pi\leqq x\leqq\pi$ における最大値が 2π で, $-\pi\leqq x\leqq\pi$ が1周期をふくむので

$$\sqrt{a^2+b^2}+\pi b=2\pi \quad \text{すなわち} \quad a^2+b^2=\pi^2(2-b)^2\cdots(*)$$

となっている.

このとき

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\ dx=\int_{-\pi}^{\pi}(a\ \sin x+b\ \cos x+\pi b)^2\ dx\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(a^2\ \sin^2 x+b^2\ \cos^2 x+\pi^2b^2+2ab\sin x\cos x+2\pi b^2\cos x+2\pi ab\sin x\right)\ dx\\ &= \left(a^2+b^2\right)\pi+\pi^2b^2\cdot 2\pi=\pi^2(2-b)^2\cdot\pi+\pi^2b^2\cdot 2\pi\\ &= \pi^3\left\{(2-b)^2+2b^2\right\}=\pi^3\left(3b^2-4b+4\right)\\ &= \pi^3\left\{3\left(b-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}\right\}\end{aligned}$$

となるから, I を最小にする $b=\dfrac{2}{3}$ で, このとき $(*)$ より

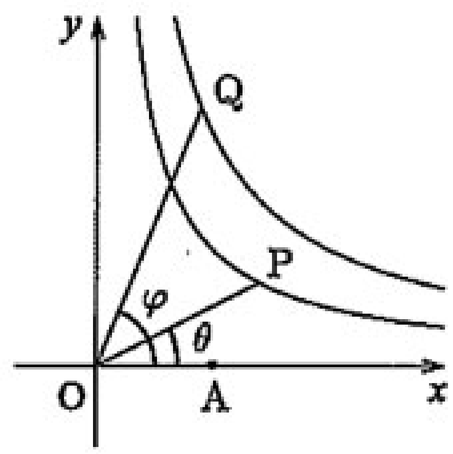
$$a^2=\pi^2\left(2-\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\pi^2\left(\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{16\pi^2-4}{9} \quad \therefore \quad a=\pm\frac{2\sqrt{4\pi^2-1}}{3}$$

また, I の最小値は $\dfrac{8}{3}\pi^3$ である. 以上まとめて,

$$a=\pm\frac{2\sqrt{4\pi^2-1}}{3}\ ,\ b=\frac{2}{3} \quad , \quad I\ \text{の最小値は}\ \frac{8}{3}\pi^3\cdots\cdots(\text{答})$$

$\boxed{9}$

条件 (1) より，P，Q は第 1 象限に存在する．AOP $=\theta$，AOQ $=\varphi$ とおくと，条件 (2) より



$$0<\theta<\varphi<\frac{\pi}{2}$$

であり，

$$\tan\theta=\frac{1}{p^2},\quad \tan\varphi=\frac{a}{q^2}$$

である．また △OPQ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\left|p\cdot\frac{a}{q}-\frac{1}{p}\cdot q\right|=\frac{1}{2pq}\left|ap^2-q^2\right|$$

であるから，条件 (3) より

$$\frac{1}{2pq}\left|ap^2-q^2\right|=3 \iff \left|ap^2-q^2\right|=6pq \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．ここで，$\angle\mathrm{POQ}=\varphi-\theta$ であるから

$$\tan\angle\mathrm{POQ}=\frac{\tan\varphi-\tan\theta}{1+\tan\varphi\tan\theta}=\frac{\dfrac{a}{q^2}-\dfrac{1}{p^2}}{1+\dfrac{a}{q^2}\cdot\dfrac{1}{p^2}}=\frac{ap^2-q^2}{p^2q^2+a} \qquad \cdots\cdots ②$$

であるが，$0<\angle\mathrm{POQ}<\dfrac{\pi}{2}$ より $\tan\angle\mathrm{POQ}>0$ であり，②より $ap^2-q^2>0$ となるので，①は

$$ap^2-q^2=6pq$$

となる．これを②に用いて，$pq>0$ であることから相加平均と相乗平均の関係を適用すると

$$\tan\angle\mathrm{POQ}=\frac{6pq}{p^2q^2+a}=\frac{6}{pq+\dfrac{a}{pq}}\leqq\frac{6}{2\sqrt{pq\cdot\dfrac{a}{pq}}}=\frac{3}{\sqrt{a}}$$

が成り立つ．ここで等号は $pq=\dfrac{a}{pq}$，すなわち $pq=\sqrt{a}$ で成立する．

したがって，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値は $\dfrac{3}{\sqrt{a}}$ であり，題意より

$$\frac{3}{\sqrt{a}}=\frac{3}{4} \iff a=16 \qquad \cdots\cdots (答)$$

$\boxed{10}$

（1）$3^n = k^3 + 1 \Leftrightarrow 3^n = (k+1)(k^2 - k + 1)$

これより，　$k + 1 = 3^m \ \ (m = 1, 2, \cdots)$　　①

とおけば，　$k^2 - k + 1 = 3^{n-m}$　であるから，

①$_{\Gamma}$を用いると，$(3^m - 1)^2 - (3^m - 1) + 1 = 3^{n-m}$

$$3^{2m} - 3 \cdot 3^m + 3 = 3^{n-m}$$

$$3^{2m-1} - 3^m + 1 = 3^{n-m-1} \quad ②$$

②の左辺は３で割ると１余る自然数であるから，

$$3^{n-m-1} = 1 \qquad \therefore n - m = 1$$

したがって，$k^2 - k + 1 = 3$

$(k+1)(k-2) = 0$　これを満たす自然数kは，$k = 2$

このとき，与式は，$3^n = 9 \quad \therefore n = 2$　　（答）$(k, n) = (2, 2)$

（2）$3^n = k^2 - 40$

$$3^n\text{の１位の数} = \begin{cases} 3 & (n = 4l - 3) \\ 9 & (n = 4l - 2) \\ 7 & (n = 4l - 1) \\ 1 & (n = 4l) \end{cases} \quad (l = 1, 2, \cdots) \quad ③$$

$k^2 - 40$の１位の数＝k^2の１位の数 $(k = 1, 2, \cdots, 10)$

$$= 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0$$

よって，両辺で一致する１位の数は，１ または ９ である。

このとき，③より，$n = 4l - 2$または$n = 4l$であるからnは偶数である。

そこで，$n = 2m \ \ (m = 1, 2, \cdots)$ とおくと，与式は，

$$k^2 - 3^{2m} = 40 \ \Leftrightarrow \ (k + 3^m)(k - 3^m) = 40$$

ここで，　$0 < (k - 3^m) < (k + 3^m) \leqq 40$　であるから，

$$(k + 3^m) - (k - 3^m) = 2 \cdot 3^m < 40$$

これを満たす自然数mは，$m = 1, 2$である。

$m = 1$のとき，$n = 2$であり，　$k^2 = 3^2 + 40 = 49 \quad \therefore k = 7$

$m = 2$のとき，$n = 4$であり，　$k^2 = 3^4 + 40 = 121 \quad \therefore k = 11$

（答）$(k, n) = (7, 2), (11, 4)$

$\boxed{11}$

(1) $x=a$ で微分可能であるから

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

となる. すなわち

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

である. 条件 (P) より

✿ $x\to a+0$ のとき, $x-a>0$ であるから, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqq 0$

$$\therefore\quad f'(a)=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqq 0$$

✿ $x\to a-0$ のとき, $x-a<0$ であるから, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqq 0$

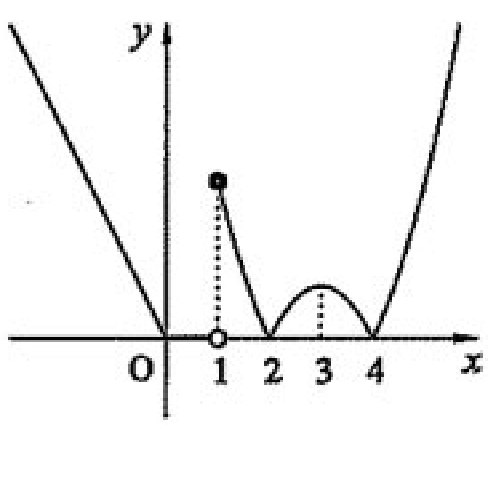
$$\therefore\quad f'(a)=\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqq 0$$

よって, $0\leqq f'(a)\leqq 0$ すなわち, $f'(a)=0$

(2)

$$|x|-x=\begin{cases} x-x=0 & \cdots\cdots\ 0\leqq x<1 \text{ のとき} \\ -x-x=-2x & \cdots\cdots\ x\leqq 0 \text{ のとき}\end{cases}$$

$$|x^2-6x+8|=\begin{cases} x^2-6x+8 & \cdots\cdots\ 1\leqq x\leqq 2 \text{ または } 4\leqq x \text{ のとき} \\ -x^2+6x-8 & \cdots\cdots\ 2\leqq x\leqq 4 \text{ のとき}\end{cases}$$



(i) $0<a<1$ のとき，$f(a)=0$

$0<r<a$ かつ $0<r<1-a$ とおけば，

$|x-a|<r$ をみたすすべての実数 x に対して $0<a-r<x<a+r<1$ となるから，$f(x)=0$

すなわち，$f(x) \leqq f(a)$ が成立する．

(ii) $a=1$ のとき，$f(1)=3$

$0<r<1$ とおけば，

$|x-a|<r$ をみたすすべての実数 x に対して $0<1-r<x<1+r<2$ となる．

$1-r<x<1$ のとき，$f(x)=0$

$1 \leqq x<1+r$ のとき，$f(x) \leqq 3$

よって，$f(x) \leqq f(1)$ が成立する．

(iii) $a=3$ のとき，同様に $0<r<1$ とおけば条件(P)が成立する．

(iv) 1以外の微分可能でない点について

$a=0$ では，任意の $r>0$ に対して，$\left|-\frac{r}{2}-0\right|<r$ であり，

$$f\left(-\frac{r}{2}\right)=r>0=f(0)$$

が成立するので不適．

$a=2, 4$ のときも同様に不適．

(v) 微分可能な点においては $f'(a)=0$ が必要条件であるが，(i)(iii) 以外に $f'(a)=0$ となる点は存在しない．

よって，$x \leqq 0,\ 1<x<3,\ 3<x<4,\ 4<x$ は不適である．

以上より，$0<a \leqq 1,\ a=3$ …… (答)

(3) 反例が存在する．

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \cdots\cdots \quad x=0 \quad のとき \\ 0 & \cdots\cdots \quad x \neq 0 \quad のとき \end{cases}$$

は実数全体で定義された関数である．

(i) $a=0$ のとき，任意の x について $f(x) \leqq f(1)$ が成立する．

(ii) $a>0$ のとき，$0<r<a$ とおけば

$|x-a|<r$ をみたすすべての実数 x について $x>a-r>0$ であるから，$f(x)=0$ となり，$f(x) \leqq f(a)$ が成立する．

(iii) $a<0$ のときも同様に成立する．

よって，すべての実数 a が条件(P)をみたすが，定数でない関数が存在する．すなわち，この命題は正しくない．