2009年度　東京大学　前期　数学(文系)

第　1　問

(1)　C_3 が C_1 に内接することから，　$\sqrt{a^2+b^2}=2-t$　……①

また，C_3 が C_2 に外接することから，$\sqrt{(a-1)^2+b^2}=1+t$　……②

ただし，　$0<t<2$　……③

③のもとで，

$$①\Leftrightarrow a^2+b^2=(2-t)^2 \quad ……④$$

$$②\Leftrightarrow (a-1)^2+b^2=(1+t)^2 \quad ……⑤$$

④，⑤を辺々引いて，$2a-1=3-6t$　$\therefore$　$a=2-3t$

これを④に代入して整理すると，$b^2=8t-8t^2$　……⑥

$b>0$ に注意して，　$b=\sqrt{8t-8t^2}$　……⑦

t がとりうる値の範囲は，③，かつ，⑥の右辺が正であることより，

③かつ $0<t<1$　$\therefore$　$0<t<1$　……⑧

(2)　⑦より $b=\sqrt{-8\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+2}$ であるから，⑧における b の最大値は，

$$\sqrt{2}\quad\left(t=\frac{1}{2}のとき\right)$$

第　2　問

(1)　mが素数ならば，${}_m\mathrm{C}_1=m$を割り切る自然数は1とmだけであり，さらに，$r=1,2,\cdots,m-1$のとき，

$$r\,{}_m\mathrm{C}_r=m\,{}_{m-1}\mathrm{C}_{r-1}$$

の右辺はmで割り切れるから，左辺もmで割り切れ，rがmで割り切れないことから，${}_m\mathrm{C}_r$がmで割り切れる．

以上から，${}_m\mathrm{C}_r\ (r=1,2,\cdots,m-1)$をすべて割り切る最大の自然数，すなわち$d_m$は$m$である．

(2)　(i)　$k=1$のとき

$k^m-k=0$はd_mで割り切れる．

(ii)　自然数kに対してk^m-kがd_mで割り切れるとする．

$$(k+1)^m-(k+1)=\sum_{r=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_r k^r-(k+1)=\sum_{r=1}^{m-1}{}_m\mathrm{C}_r k^r+(k^m-k)$$

において，${}_m\mathrm{C}_r\ (r=1,2,\cdots,m-1)$はすべて$d_m$で割り切れ，$k^m-k$も$d_m$で割り切れることから，$(k+1)^m-(k+1)$は$d_m$で割り切れる．

以上から，すべての自然数kに対して，k^m-kがd_mで割り切れる．

第　3　問

(1)　操作(A)を5回おこなったとき，Lに4色すべての玉が入っているのは，ある色の玉が2回出て，それ以外の3色の玉が1回ずつ出る場合であるから，その確率は

$$ {}_4C_1\cdot\frac{5!}{2!1!1!1!}\left(\frac{1}{4}\right)^5=4\cdot5\cdot4\cdot3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{5\cdot3}{4^3}=\frac{15}{64}\quad\cdots\cdots① $$

操作(B)を5回おこなったとき，Rに4色すべての玉が入っている確率も同じであるから，

$$ P_1=\left(\frac{15}{64}\right)^2=\frac{225}{4096} $$

(2)　①と同じで，$P_2=\dfrac{15}{64}$

(3)　操作(C)を10回おこなったとき，LにもRにも4色すべての玉が入っているのは，

ある色の玉が4回出て，それ以外の3色の玉が2回ずつ出る

または

ある2色の玉が3回ずつ出て，それ以外の2色の玉が2回ずつ出る

場合であるから，

$$ \begin{aligned} P_3&=\left({}_4C_1\cdot\frac{10!}{4!2!2!2!}+{}_4C_2\cdot\frac{10!}{3!3!2!2!}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\\ &=(4\cdot10\cdot9\cdot7\cdot6\cdot5+6\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot5)\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\\ &=4^2\cdot5^2\cdot3^4\cdot7\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{10} \end{aligned} $$

以上から，

$$ \frac{P_3}{P_1}=\frac{4^2\cdot5^2\cdot3^4\cdot7}{(4^2\cdot5\cdot3)^2}=\frac{3^2\cdot7}{4^2}=\frac{63}{16} $$

第 4 問

(1) $f(0)=0$，$f(2)=2$ より，$\begin{cases} c=0 \\ 4a+2b+c=2 \end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases} b=-(2a-1) \\ c=0 \end{cases}$

よって，$f(x)=ax^2-(2a-1)x$ であり，このとき，$f'(x)=2ax-(2a-1)$

$y=f'(x)$ のグラフは直線であり，$f'(0)=-2a+1$，$f'(2)=2a+1$ であることに注意して，場合分けする．

(i) $-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$0\leqq x\leqq 2$ において $f'(x)\geqq 0$ であるから，

$$S=\int_0^2|f'(x)|dx=\int_0^2 f'(x)\,dx=f(2)-f(0)=2-0=2$$

(ii) $a<-\dfrac{1}{2}$ のとき

$0\leqq x\leqq\dfrac{2a-1}{2a}$ において $f'(x)\geqq 0$，$\dfrac{2a-1}{2a}\leqq x\leqq 2$ において $f'(x)\leqq 0$ であるから，

$$\begin{aligned} S&=\int_0^2|f'(x)|dx=\int_0^{\frac{2a-1}{2a}}f'(x)\,dx-\int_{\frac{2a-1}{2a}}^2 f'(x)\,dx \\ &=\left\{f\left(\frac{2a-1}{2a}\right)-f(0)\right\}-\left\{f(2)-f\left(\frac{2a-1}{2a}\right)\right\}=2f\left(\frac{2a-1}{2a}\right)-f(0)-f(2) \\ &=2\left\{a\left(\frac{2a-1}{2a}\right)^2-(2a-1)\frac{2a-1}{2a}\right\}-0-2=-\frac{(2a-1)^2}{2a}-2=-2a-\frac{1}{2a} \end{aligned}$$

(iii) $a>\dfrac{1}{2}$ のとき

$0\leqq x\leqq\dfrac{2a-1}{2a}$ において $f'(x)\leqq 0$，$\dfrac{2a-1}{2a}\leqq x\leqq 2$ において $f'(x)\geqq 0$ であるから，この場合の S は，(ii)の場合の結果の (-1) 倍に等しく，

$$S=2a+\frac{1}{2a}$$

(2) $a>\dfrac{1}{2}$ のとき，相加平均・相乗平均の不等式より，

$$S=2a+\frac{1}{2a}\geqq 2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{2a}}=2$$

であり，$a<-\dfrac{1}{2}$ のとき，同様にして，

$$S=-2a-\frac{1}{2a}\geqq 2\sqrt{(-2a)\cdot\left(-\frac{1}{2a}\right)}=2$$

である．さらに，$-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき $S=2$ であるから，S の最小値は，2