2009年度　東京工業大学　前期　物理

1

(a)　〔導出過程〕 ばねの縮みが r の場合に，A が壁から受ける垂直抗力を N とすると，A の運動方程式水平成分は $0 = N - kr$　$\therefore N = kr$。よって B の運動が始まり r が l から減少すると，$r = 0$ のとき $N = 0$ となり，その直後 A は壁から離れる。よって B についてエネルギー保存則は

$$\frac{m}{2}{v_0}^2 = \frac{k}{2}l^2$$

となり，これを解く。　〔答〕　$v_0 = l\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

(b)　〔導出過程〕 $v_{\mathrm{P}} = \dfrac{1}{2}(0 + v_0) = \dfrac{1}{2}v_0$　〔答〕　$v_{\mathrm{P}} = \dfrac{1}{2}v_0$

(c)　〔導出過程〕 PB 間の距離を x とすると，点 P は中点ゆえ AB 間の距離は $2x$ で，ばねの縮みは $L - 2x$。従って中点からみた (重心系での)B の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = +k\,(L - 2x) \quad \therefore\ \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2k}{m}\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

これより x は角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$，振動中心 $x = \dfrac{L}{2}$ の単振動。$t = 0$ で $x = \dfrac{L}{2}$，$\dfrac{dx}{dt} = v_0 - v_{\mathrm{P}} = \dfrac{v_0}{2}$ を満たす解は，$x = \dfrac{L}{2} + \dfrac{v_0/2}{\omega}\sin(\omega t)$。$2x = L$ となる正で最小の t は，$t = t_1 = \dfrac{\pi}{\omega}$。　〔答〕　$t_1 = \pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$。

(d)　〔導出過程〕 $t_2 = 2t_1$ ゆえ，考える時刻は $t = (t_1 + t_2)/2 = 3t_1/2$　$\therefore \omega t = 3\pi/2$。このとき $x = \dfrac{L}{2} - \dfrac{v_0/2}{\omega}$　$\therefore L_{\mathrm{S}} = 2x = L - \dfrac{v_0}{\omega}$。$\omega$ と v_0 は代入する。　〔答〕　$L_{\mathrm{S}} = L - \dfrac{l}{\sqrt{2}}$

(e)　〔導出過程〕 t_2 は単振動の 1 周期ゆえ，$t = t_2$ の A の速度は $t = 0$ での値と同じ。　〔答〕　$v_{\mathrm{A}} = 0$

(f)　〔導出過程〕 $t = t_2$ における物体 A の床に対する速度は 0 ゆえ，撃力を加えた直後に P が静止したことから，撃力を加えた直後の B の床に対する速度も 0。撃力を加える直前の B の速度は v_0 だから，加えた力積の大きさは $I = mv_0 - 0$。　〔答〕　$I = mv_0$

2

［A］ (a) 〔導出過程〕 容量が $\dfrac{\varepsilon_0 S}{D}$ から $\dfrac{\varepsilon_0 S}{D+d}$ に変化し，電気量は Q のままなので，

$$\Delta U = \frac{Q^2}{2\frac{\varepsilon_0 S}{D+d}} - \frac{Q^2}{2\frac{\varepsilon_0 S}{D}} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}d$$

〔答〕 $\Delta U = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}d$

(b) 〔導出過程〕 電極間の電場は一定ゆえ，外力が加えた仕事は $F_{\mathrm{E}}d$ と表せる。これが ΔU に等しいから $F_{\mathrm{E}} = \Delta U/d$

〔答〕 $F_{\mathrm{E}} = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$

(c) 〔導出過程〕 上電極の座標を x とすると，上電極の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = k(D-x) - mg - F_{\mathrm{E}} \quad \therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left(x - D + \frac{mg+F_{\mathrm{E}}}{k}\right)$$

これより x は単振動で振動中心は $x = x_{\mathrm{c}} = D - \dfrac{mg+F_{\mathrm{E}}}{k}$。初期条件より振幅は $A = D - x_{\mathrm{c}}$ だから，x の最小値は $x_{\mathrm{m}} = x_{\mathrm{c}} - A = 2x_{\mathrm{c}} - D$。電極間の電場は $E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$ のままだから求める電位は $V_1 = Ex_{\mathrm{m}}$。

〔答〕 $V_1 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}\left(D - \dfrac{2mg}{k} - \dfrac{Q^2}{\varepsilon_0 Sk}\right)$

［B］ (d) 〔導出過程〕 $C_{\mathrm{r}} = 3\varepsilon_0\dfrac{S}{\frac{D}{2}}$，$C_{\mathrm{b}} = \varepsilon_0\dfrac{S}{\frac{D}{2}+b}$ を用いて

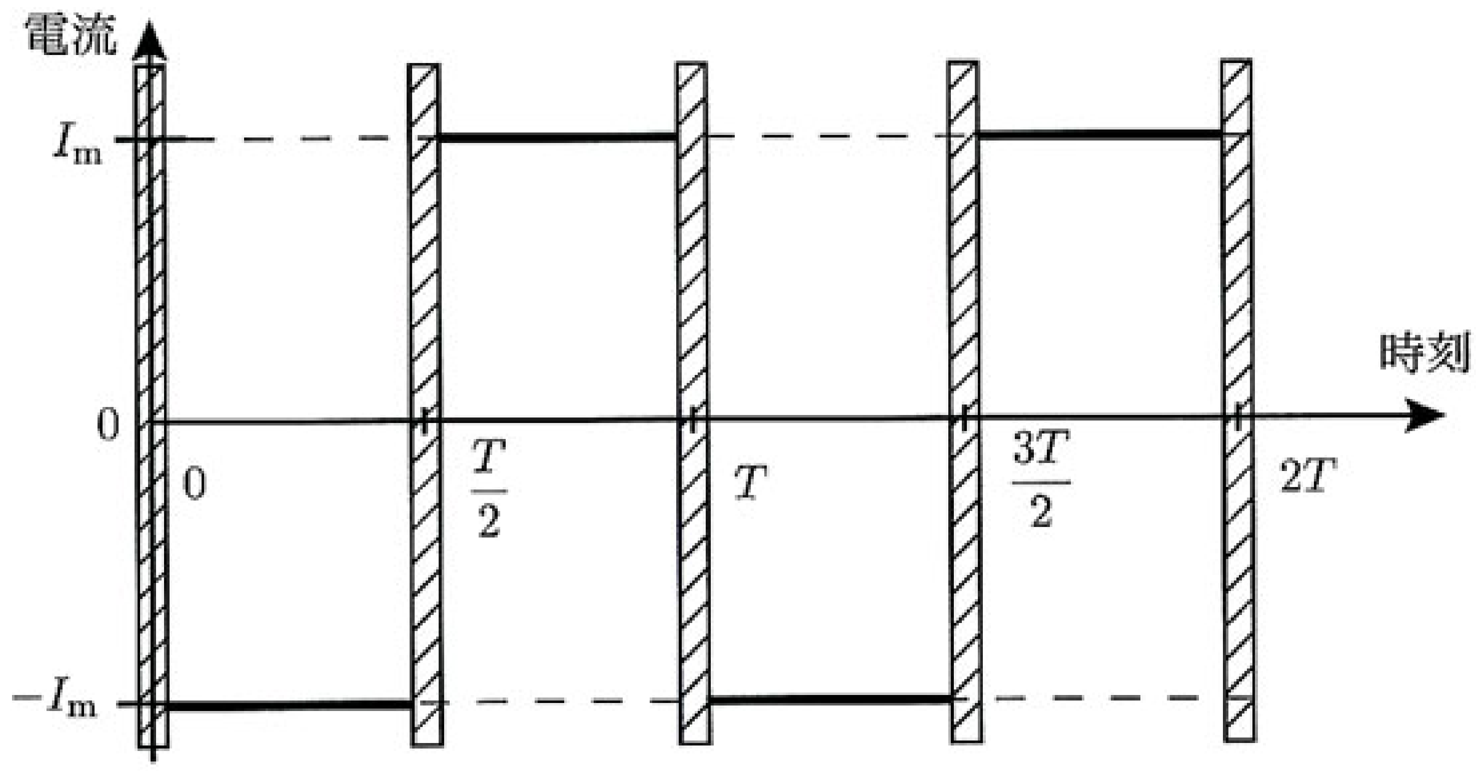
$$C' = \left(\frac{1}{C_{\mathrm{r}}} + \frac{1}{C_{\mathrm{b}}}\right)^{-1} = \frac{3\varepsilon_0 S}{2D}\left(1 + \frac{3b}{2D}\right)^{-1} = \frac{3\varepsilon_0 S}{2D+3b}$$

また回路の方程式 $\dfrac{Q'}{C'} = V_0$ より $Q' = C'V_0$。

〔答〕 $C' = \dfrac{3\varepsilon_0 S}{2D+3b}$，　$Q' = \dfrac{3\varepsilon_0 SV_0}{2D+3b}$

(e) 〔答〕 (ア) C_0V_0 　(イ) $\dfrac{3b}{2D}$

(f) 〔グラフ〕



〔答〕 $I_{\mathrm{m}} = C_0V_0\dfrac{3a}{DT}$

3

(a) 〔導出過程〕 圧力 p，温度 T_0 の大気 n モルの体積を V とすると，状態方程式は

$pV = nRT_0$ $\quad\therefore\quad$ (モル数密度) $\dfrac{n}{V} = \dfrac{p}{RT_0}$ $\quad\therefore\quad \rho = \dfrac{nm}{V} = \dfrac{mp}{RT_0}$ 〔答〕 $\rho = \dfrac{mp}{RT_0}$

(b) 〔導出過程〕 気球内ガスの体積 V_1 は状態方程式より $V_1 = \dfrac{nRT_1}{p_0}$。浮力は $\rho_0 = \dfrac{mp_0}{RT_0}$ を用いて $f_\mathrm{b} = \rho_0 V_1 g$。全重力は $f_\mathrm{g} = (M + nm)g$。$f_\mathrm{b} = f_\mathrm{g}$ より M を求める。 〔答〕 $M = \left(\dfrac{T_1}{T_0} - 1\right)nm$

(c) 〔導出過程〕 内部エネルギー変化は $\varDelta U = \dfrac{5}{2}nR(T_2 - T_1)$。気球内ガスがした仕事は，状態方程式も用いて

$W = p_0(V_2 - V_1) = nR(T_2 - T_1)$

以上を用いて熱力学第 1 法則より $Q = \varDelta U + W$。 〔答〕 $Q = \dfrac{7}{2}nR(T_2 - T_1)$

(d) 〔導出過程〕 問(b)のときの張力は 0。その後，重力一定のまま浮力のみが増加したから，求める張力は浮力の増加分で，

$\varDelta f_\mathrm{b} = \rho_0(V_2 - V_1)g = \dfrac{mp_0}{RT_0}\left(\dfrac{nRT_2}{p_0} - \dfrac{nRT_1}{p_0}\right)g = \dfrac{T_2 - T_1}{T_0}nmg$ 〔答〕 張力：$\dfrac{T_2 - T_1}{T_0}nmg$

(e) 〔導出過程〕 気球が止まった高さでの大気の圧力を $p_0{}'$，密度を $\rho_0{}'$ とすると，問(a)より $\rho_0{}' = \dfrac{mp_0{}'}{RT_0}$。止まった気球の体積 V_3 は状態方程式より $V_3 = \dfrac{nRT_3}{p_0{}'}$。よって浮力は $f_\mathrm{b}{}' = \rho_0{}' V_3 g = \dfrac{T_3}{T_0}nmg$。つりあい $f_\mathrm{b}{}' = f_\mathrm{g}$ より T_3 を求めると，$T_3 = \left(1 + \dfrac{M}{nm}\right)T_0$。$M$ に問(b)の値を代入する。 〔答〕 $T_3 = T_1$

(f) 〔導出過程〕 断熱変化ゆえ，熱力学第 1 法則より，W_{23} は内部エネルギーの減少分に等しいから，

$W_{23} = \dfrac{5}{2}nR(T_2 - T_3) = \dfrac{5}{2}nR(T_2 - T_1)$ 〔答〕 $W_{23} = \dfrac{5}{2}nR(T_2 - T_1)$

(g) 〔答〕 ③