2009年度　東北大学　前期　数学(理系)

$\boxed{1}$

(1) c を消去する.

$$\begin{aligned} a^3+b^3+3abc-c^3 &= a^3+b^3-c^3+3abc \\ &= a^3+b^3-(a+b)^3+3ab(a+b) \\ &= a^3+b^3-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+3a^2b+3ab^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって,

$a+b=c$ であるとき, $a^3+b^3+3abc=c^3$ が成り立つことが示された.　　(証明終わり)

(2)
$$\begin{aligned} a^3+b^3+3abc-c^3 &= \left\{(a+b)^3-3ab(a+b)\right\}+3abc-c^3 \\ &= \left\{(a+b)^3-c^3\right\}-3ab(a+b-c) \\ &= \left\{(a+b)-c\right\}\left\{(a+b)^2+(a+b)c+c^2\right\}-3ab(a+b-c) \\ &= (a+b-c)(a^2-ab+b^2+ac+bc+c^2) \\ &= (a+b-c)\cdot\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\right\} \\ &\geqq 0 \qquad (\because\ a,\ b,\ c \text{ は実数}) \end{aligned}$$

よって,

$a+b \geqq c$ であるとき, $a^3+b^3+3abc \geqq c^3$ が成り立つことが示された.　　(証明終わり)

【注】なお, 等号は $a+b=c$ または $a=b=-c$ のときに成立する.

$\boxed{2}$

(1) 縦 1cm，横 $(L+1)$cm の長方形を P とする．

長方形 A は長方形 P を横に L 枚並べるが，1cm ののりしろが $(L-1)$ 箇所ある．ゆえに A の横の長さは

$$(L+1)\times L - 1\times(L-1) = L^2+1 \ (\text{cm})$$

よって，A の面積 S_1 は

$$S_1 = 1\times(L^2+1) = L^2+1 \ (\text{cm}^2) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

長方形 B は長方形 P を縦に L 枚に並べるが，a cm ののりしろが $(L-1)$ 箇所ある．ゆえに B の横の長さは

$$1\times L - a(L-1) = (1-a)L + a \ (\text{cm})$$

よって，B の面積 S_2 は

$$S_2 = (L+1)\{(1-a)L+a\} = (1-a)L^2+L+a \ (\text{cm}^2) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $L=2$ のとき $S_1=5$，$S_2=6-3a$ である．ゆえに $S_1-1<S_2$ を満たすための条件は

$$4<6-3a \quad \Leftrightarrow \quad a<\frac{2}{3}$$

$0<a<1$ にも注意すると，求める a の値の範囲は

$$0<a<\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

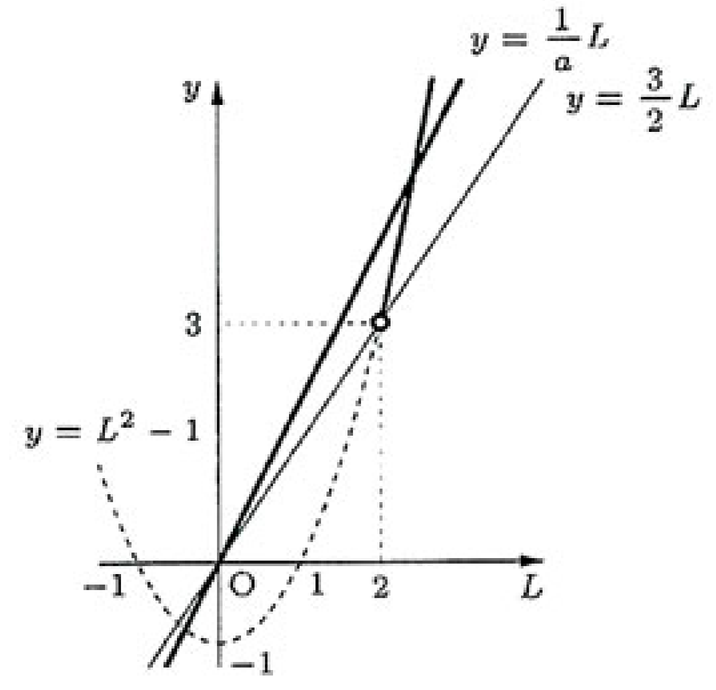
(3) $S_1=L^2+1$，$S_2=(1-a)L^2+L+a$ より

$$\begin{aligned} S_1-1<S_2 \quad &\Leftrightarrow \quad L^2<(1-a)L^2+L+a \\ &\Leftrightarrow \quad aL^2-L-a<0 \end{aligned}$$

$a>0$ より両辺を a で割ると

$$\Leftrightarrow \quad L^2-1<\frac{L}{a} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

右図のような Ly 平面における放物線 $y=L^2-1$ ……② と直線 $y=\dfrac{1}{a}L$ ……③ を考えると，①を満たす 2 以上の自然数 L が存在するための条件は，放物線②と直線③が $L>2$ の範囲で共有点をもつことであるから



$$\frac{1}{a}>\frac{3}{2} \qquad \therefore \quad 0<a<\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$\boxed{3}$ 10個の玉を全て並べると考える．青玉同士，赤玉同士は区別しない．

(1) $\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{青3個}}\underbrace{\bigcirc}_{\text{赤1個}}\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\substack{\text{青4個}\\\text{赤2個}}}$

という場合であるので，青4個と赤2個の並びかえを考えて，$\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{8}$ ……(答)

(2) $\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\substack{\text{青5個}\\\text{赤3個}}}\underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{\text{青2個}}$

という場合であるので，青5個と赤3個の並びかえを考えて，$\dfrac{{}_8\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{7}{15}$ ……(答)

(3) $\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\substack{\text{青5個}\\\text{赤2個}}}\underbrace{\bigcirc}_{\text{赤1個}}\underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{\text{青2個}}$

という場合であるので，青5個と赤2個の並びかえを考えて，$\dfrac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{7}{40}$ ……(答)

(4) 赤玉の個数を X とおき，4回目が終わった時点で，赤玉が $X=k$ 個取り出されている確率を $P(X=k)$ とおく．ここで，$k=0,1,2,3$ である．

$P(X=0)$ を考える． $\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{青4個}}\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\substack{\text{青3個}\\\text{赤3個}}}$

という場合であるので，青3個と赤3個の並びかえを考えて

$$P(X=0)=\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{20}{120}$$

$P(X=1)$ を考える． $\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\substack{\text{青3個}\\\text{赤1個}}}\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\substack{\text{青4個}\\\text{赤2個}}}$

という場合であるので，青3個と赤1個の並びかえ，青4個と赤2個の並びかえを考えて

$$P(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{60}{120}$$

$P(X=2)$ を考える． $\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\substack{\text{青2個}\\\text{赤2個}}}\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\substack{\text{青5個}\\\text{赤1個}}}$

という場合であるので，青2個と赤2個の並びかえ，青5個と赤1個の並びかえを考えて

$$P(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{36}{120}$$

$P(X=3)$ を考える． $\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\substack{\text{青1個}\\\text{赤3個}}}\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\text{青6個}}$

という場合であるので，青1個と赤3個の並びかえを考えて

$$P(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{4}{120}$$

以上より，

X	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\dfrac{20}{120}$	$\dfrac{60}{120}$	$\dfrac{36}{120}$	$\dfrac{4}{120}$

であるので，求める期待値は $\dfrac{0\cdot20+1\cdot60+2\cdot36+3\cdot4}{120}=\dfrac{6}{5}$ ……(答)

$\boxed{4}$

(1) $$\sin\theta - \sin(\theta-2a) = 2\sin a\cos(\theta-a)$$

ゆえに，$f(\theta)$ の定義から $0 \leqq \theta \leqq \pi$，$0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$f(\theta) = \begin{cases} \sin\theta & \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}+a\right) \\ \sin(\theta-2a) & \left(\dfrac{\pi}{2}+a \leqq \theta \leqq \pi\right) \end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} f(\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}+a} \sin\theta\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}+a}^{\pi} \sin(\theta-2a)\,d\theta \\ &= \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}+a} + \Big[-\cos(\theta-2a)\Big]_{\frac{\pi}{2}+a}^{\pi} \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right) + 1 - \cos(\pi-2a) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) \\ &= \sin a + 1 + \cos 2a + \sin a \\ &= -2\sin^2 a + 2\sin a + 2 \quad (\because \quad \cos 2a = 1-2\sin^2 a) \end{aligned}$$

……(答)

(2) (1) より

$$I = -2\left(\sin a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$$

$0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $0 \leqq \sin a \leqq 1$ なので，I は $\sin a = \dfrac{1}{2}$ つまり $a = \dfrac{\pi}{6}$ のときに最大となる．

よって，求める最大値は

$$\frac{5}{2}$$

……(答)

$\boxed{5}$

(1) $APA = P^2$ …… $(*)$ より

$$P^3A = P^2(PA) = (APA)PA = AP(APA) = APP^2 = AP^3$$ **(証明終わり)**

(2) $P^3 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} p^3 & 0 \\ 0 & q^3 \end{pmatrix}$ より

$$P^3A = \begin{pmatrix} p^3 & 0 \\ 0 & q^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap^3 & bp^3 \\ cq^3 & dq^3 \end{pmatrix}$$

$$AP^3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^3 & 0 \\ 0 & q^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap^3 & bq^3 \\ cp^3 & dq^3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad P^3A = AP^3 \iff \begin{cases} bp^3 = bq^3 \\ cq^3 = cp^3 \end{cases} \iff \begin{cases} b(p-q)(p^2+pq+q^2) = 0 \\ c(p-q)(p^2+pq+q^2) = 0 \end{cases}$$

$p,\ q$ は実数より $\quad p^2 + pq + q^2 = \left(p + \dfrac{q}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}q^2 \fallingdotseq 0$ なので

$$P^3A = AP^3 \iff p = q \quad \text{または} \quad b = c = 0$$

(i) $p = q$ のとき

$P = pE$ であり

$$(*) \iff pA^2 = p^2E \iff A^2 = pE \quad \cdots\cdots ① \quad (\because\ p > 0)$$

ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$
$$\therefore \quad (a+d)A = (p + ad - bc)E$$

(ア) $a + d = 0$ のとき

$$p + ad - bc = 0 \qquad \therefore \quad ad - bc = -p < 0 \quad (\because\ p > 0)$$

これは $ad - bc > 0$ に反する.

(イ) $a + d \fallingdotseq 0$ のとき

$$A = \frac{p + ad - bc}{a + d}E = kE \quad (k \text{ は実数の定数}) \text{ とおける.}$$

$$① \iff k^2E = pE \qquad \therefore \quad k = \pm\sqrt{p}$$

よって,

$$A = \pm\sqrt{p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $b = c = 0$ のとき $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ であり

$$APA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2p & 0 \\ 0 & d^2q \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad (*) \iff \begin{cases} a^2p = p^2 \\ d^2q = q^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm\sqrt{p} & (\because\ p > 0) \\ d = \pm\sqrt{q} & (\because\ q > 0) \end{cases}$$

$ad - bc > 0$ より $ad > 0$ であるから

$$A = \pm\begin{pmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{pmatrix}$$

(i) は (ii) に含まれるから

$$A = \pm\begin{pmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{pmatrix}$$ ……**(答)**

$\boxed{6}$

$$|x(x-2)|+2a|x|-4a|x-2|-1=0 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$\iff |x(x-2)|-1=2a(2|x-2|-|x|) \qquad \cdots\cdots ①'$$

$2|x-2|-|x|=0$ を満たす x は

$$2(x-2)=\pm x \qquad \therefore \quad x=4,\ \frac{4}{3}$$

これらは ①$'$ を満たさないから

$$①' \iff 2a=\frac{|x(x-2)|-1}{2|x-2|-|x|}$$

$f(x)=\dfrac{|x(x-2)|-1}{2|x-2|-|x|}$ とおく．

(i) $x \leqq 0$ のとき

$$f(x)=\frac{x(x-2)-1}{-2(x-2)+x}=-\frac{x^2-2x-1}{x-4}$$

$$f'(x)=-\frac{(2x-2)(x-4)-(x^2-2x-1)}{(x-4)^2}=-\frac{x^2-8x+9}{(x-4)^2}<0$$

(ii) $0<x<2$ のとき

$$f(x)=\frac{-x(x-2)-1}{-2(x-2)-x}=\frac{(x-1)^2}{3x-4}$$

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(3x-4)-3(x-1)^2}{(3x-4)^2}=\frac{(x-1)(3x-5)}{(3x-4)^2}$$

(iii) $x \geqq 2$ のとき

$$f(x)=\frac{x(x-2)-1}{2(x-2)-x}=\frac{x^2-2x-1}{x-4}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-8x+9}{(x-4)^2}$$

増減表をかくと

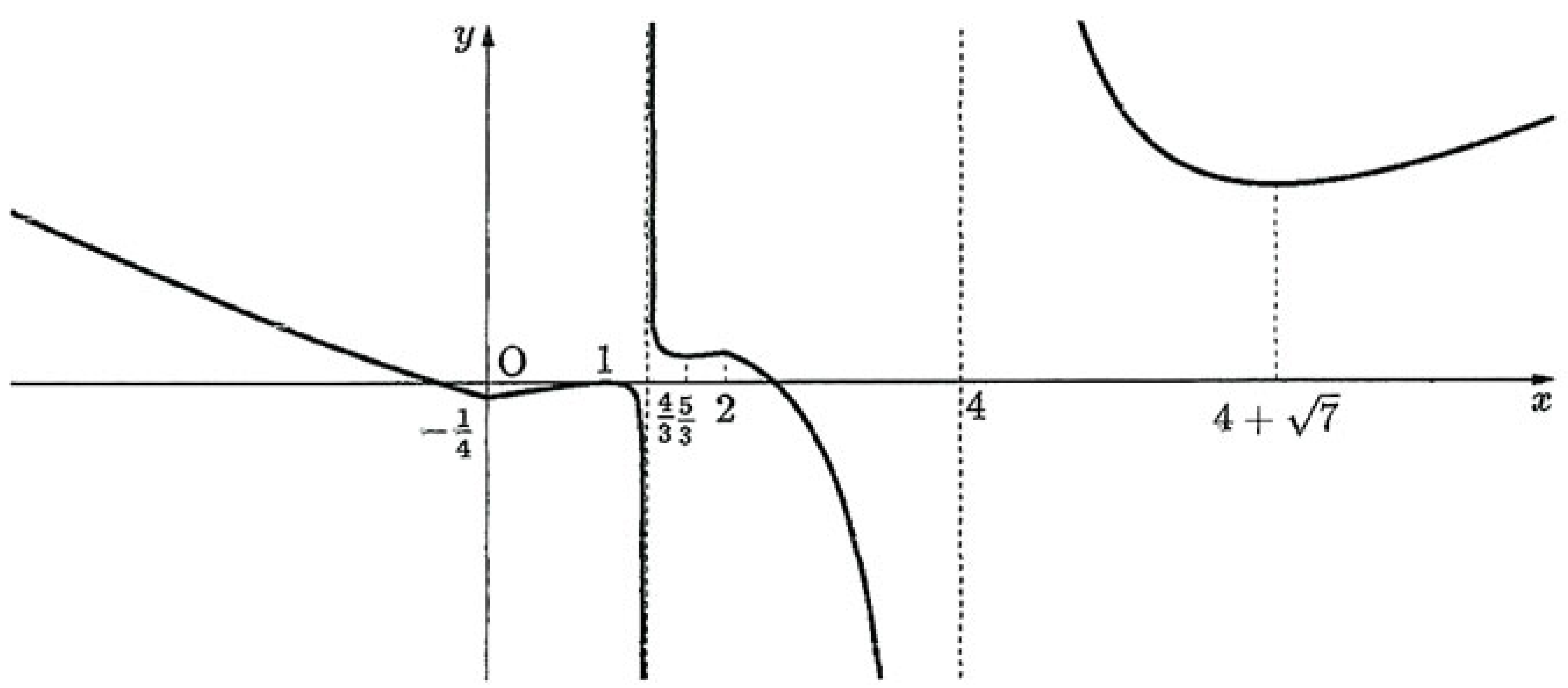
x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$	$4+\sqrt{7}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	／	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$	／	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↘	／	↘	$\frac{4}{9}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	／	↘	$6+2\sqrt{7}$	↗

また，

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to\frac{4}{3}+0}f(x)=\lim_{x\to4+0}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{3}-0}f(x)=\lim_{x\to4-0}f(x)=-\infty$$

である．これより，$y=f(x)$ を図示すると次のようになる．



直線 $y=2a$ との共有点が 4 個となる a の範囲を求めると

$$-\frac{1}{4}<2a<0,\quad \frac{4}{9}<2a<\frac{1}{2},\quad 6+2\sqrt{7}<2a$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{8}<a<0,\quad \frac{2}{9}<a<\frac{1}{4},\quad 3+\sqrt{7}<a \qquad \cdots\cdots(答)$$