$\boxed{1}$

$$2^{2x+2}+2^x a+1-a>0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$2^{2x+2}=2^{2x}\times 4$ であるから，$t=2^x$ とおくと，不等式①は次のようになる．

$$4t^2+at+1-a>0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

x がすべての実数を動くとき，対応して t はすべての正の数を動くから，

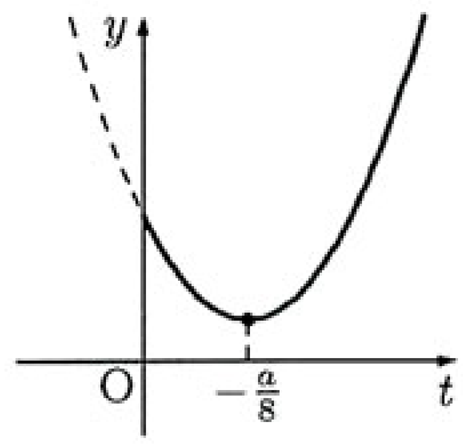
「すべての実数 x に対して不等式 ① が成り立つ」

＝「すべての正の数 t に対して不等式 ② が成り立つ」　$\cdots\cdots\cdots\cdots$ (∗)

いま，$f(t)=4t^2+at+1-a$ とおくと，

$$f(t)=4\left(t+\frac{a}{8}\right)^2-\frac{a^2}{16}-a+1$$

（i）$-\dfrac{a}{8}>0 \iff a<0$ のとき，(∗) が成り立つための a の条件は，



$$f\left(-\frac{a}{8}\right)=-\frac{a^2}{16}-a+1>0$$

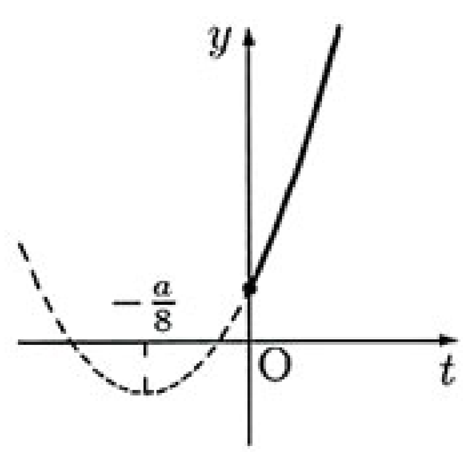
$$\therefore\ a^2+16a-16<0$$

$$\iff -8-4\sqrt{5}<a<-8+4\sqrt{5}$$

$-8+4\sqrt{5}>0$ であるから，$a<0$ とあわせて，

$$-8-4\sqrt{5}<a<0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

（ii）$-\dfrac{a}{8}\leqq 0 \iff a\geqq 0$ のとき，(∗) が成り立つための a の条件は，



$$f(0)=1-a\geqq 0 \qquad \therefore\ a\leqq 1$$

$a\geqq 0$ とあわせて，

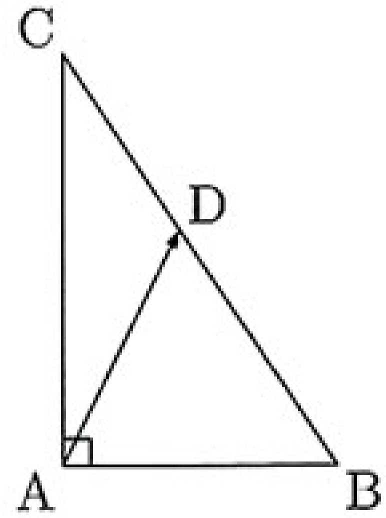
$$0\leqq a\leqq 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

したがって，(∗) が成り立つような a の範囲は，③, ④ をあわせて，

$$\boldsymbol{-8-4\sqrt{5}<a\leqq 1}$$

$\boxed{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおくと，$\mathrm{AB}=1$，$\angle\mathrm{BAC}=90°$ であるから，



$$\left|\vec{b}\right|=1,\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

(1) 点Dは辺BCを点Cから点Bまで動くから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+k\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{c}+k(\vec{b}-\vec{c})$$
$$=k\vec{b}+(1-k)\vec{c}$$

とおける．ここで，実数 k は $0\leqq k\leqq 1$ の範囲を動く．このとき，

$$t=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left\{k\vec{b}+(1-k)\vec{c}\right\}\cdot\vec{b}=k\left|\vec{b}\right|^2+(1-k)\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$=k$$

したがって，$t=k$ の動く範囲は　　$\boldsymbol{0\leqq t\leqq 1}$

(2) (1)より，　　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=t\vec{b}+(1-t)\vec{c}\quad(0\leqq t\leqq 1)$

このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left\{t\vec{b}+(1-t)\vec{c}\right\}\cdot\vec{c}=t\vec{b}\cdot\vec{c}+(1-t)\left|\vec{c}\right|^2$$
$$=(1-t)\left|\vec{c}\right|^2$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\left(t\vec{b}-t\vec{c}\right)\cdot\left(-\vec{c}\right)$$
$$=-t\vec{b}\cdot\vec{c}+t\left|\vec{c}\right|^2$$
$$=t\left|\vec{c}\right|^2$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}\iff(1-t)\left|\vec{c}\right|^2=t\left|\vec{c}\right|^2$$

$\left|\vec{c}\right|>0$ であるから，　　$1-t=t\iff t=\dfrac{1}{2}$

したがって，求める t の値は　　$t=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

3　10 個の玉を全て並べると考える．青玉同士，赤玉同士は区別しない．

(1) $\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{青3個}}\ \underbrace{\bigcirc}_{\text{赤1個}}\ \underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\substack{\text{青4個}\\ \text{赤2個}}}$

という場合であるので，青 4 個と赤 2 個の並びかえを考えて，$\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{8}$　……(答)

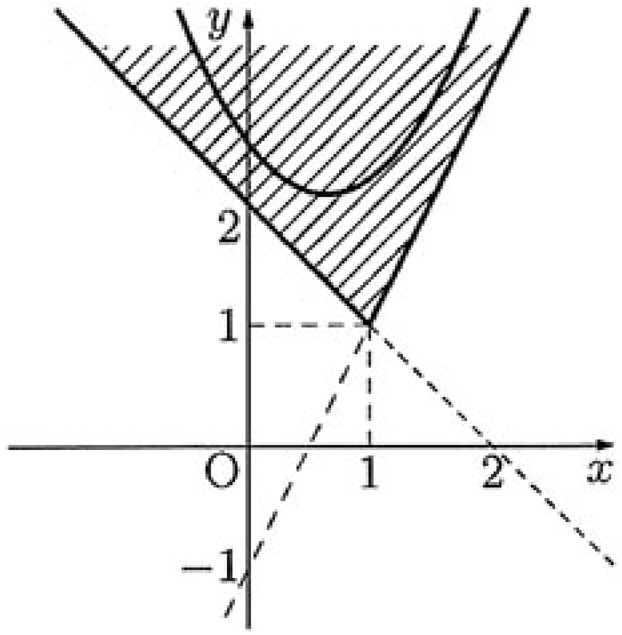
(2) $\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\substack{\text{青5個}\\ \text{赤3個}}}\underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{\text{青2個}}$

という場合であるので，青 5 個と赤 3 個の並びかえを考えて，$\dfrac{{}_8\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{7}{15}$　……(答)

(3) $\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{\substack{\text{青5個}\\ \text{赤2個}}}\ \underbrace{\bigcirc}_{\text{赤1個}}\ \underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{\text{青2個}}$

という場合であるので，青 5 個と赤 2 個の並びかえを考えて，$\dfrac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{7}{40}$　……(答)

$\boxed{4}$ 領域 D の不等式は，



$x \geqq 1$ のとき

$$2y > x+1+3(x-1) = 4x-2 \iff y > 2x-1$$

$x \leqq 1$ のとき

$$2y > x+1-3(x-1) = -2x+4 \iff y > -x+2$$

となる．

放物線 C 上の点がすべて D の点となるのは，放物線 C が 2 直線 $y=2x-1$，$y=-x+2$ の上側にあればよいので，

$$\begin{cases} x^2-2ax+a^2+a+2 > 2x-1 \\ x^2-2ax+a^2+a+2 > -x+2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2-2(a+1)x+a^2+a+3 > 0 \\ x^2-(2a-1)x+a^2+a > 0 \end{cases}$$

これがすべての実数 x で成り立てばよい．

$$x^2-2(a+1)x+a^2+a+3=0, \quad x^2-(2a-1)x+a^2+a=0$$

の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると，

$$\begin{cases} D_1/4 = (a+1)^2-(a^2+a+3) < 0 \\ D_2 = (2a-1)^2-4(a^2+a) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a-2<0 \\ -8a+1<0 \end{cases}$$

したがって，求める a の範囲は，

$$\boldsymbol{\frac{1}{8} < a < 2}$$ ……(答)