$\boxed{1}$

(1) $f(x)=x^3-kx$ とすると

$f'(x)=3x^2-k$ なので、$l_1$ の方程式は

$$y-(a^3-ka)=(3a^2-k)(x-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad y=(3a^2-k)x-2a^3$$

これと、$y=x^3-kx$ から $y$ を消去して整理すると

$$x^3-3a^2x+2a^3=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-a)^2(x+2a)=0$$

したがって B の $x$ 座標は $x=-2a$ ………(答)

(2) $l_2$ の傾きは $f'(-2a)=12a^2-k$

となるので、$l_1$ と $l_2$ が直交するとき

$$(3a^2-k)(12a^2-k)=-1$$

$$\Leftrightarrow \quad 36a^4-15ka^2+k^2+1=0$$ ………(答)

(3) $36a^4-15ka^2+k^2+1=0$ ………①

をみたす $a$ が存在するような $k$ の値の範囲を求めればよい。

$a^2=t$ とすると、①は

$$36t^2-15kt+k^2+1=0$$ ………②

となり、$a\neq 0$ より、$t$ の2次方程式②が

$t>0$ の解を少なくとも1つもつ条件を求めればよいが、

②の2解の積 $k^2+1>0$ に注意すると、求める条件は

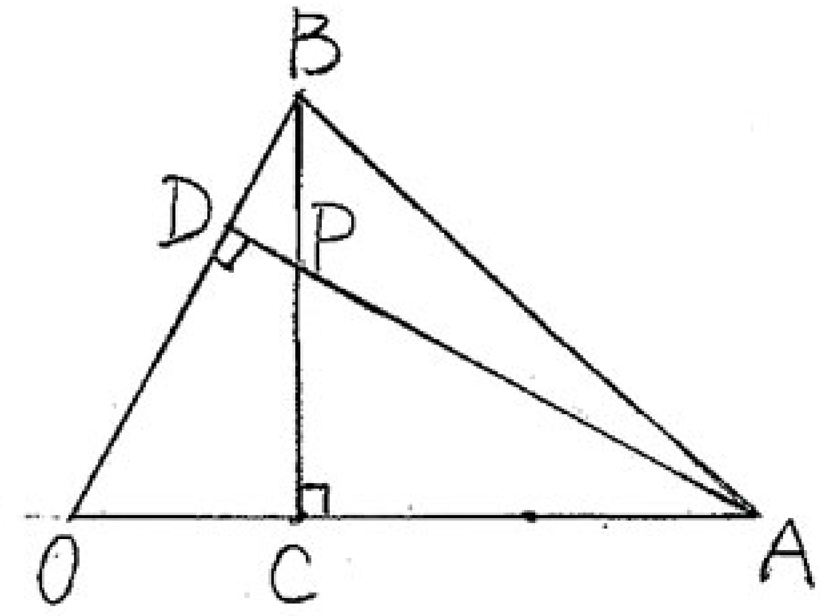
②が正の解のみをもつことであり

$$\begin{cases}(2\text{解の和})=\dfrac{5}{12}k>0\\(\text{判別式})=(15k)^2-4\cdot 36(k^2+1)\geqq 0\end{cases}$$

より、$\begin{cases}k>0\\k^2\geqq \dfrac{16}{9}\end{cases}$ $\quad\therefore\quad k\geqq \dfrac{4}{3}$ ………(答)

2

(1) $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{OB}$ より




$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OB}=0 \Longleftrightarrow \left(\frac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|-\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad \text{------} ①$$

$$\therefore \cos\angle AOB=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{2}$$

$0<\angle AOB<\pi$ だから $\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$ ------------(答)

(2) $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{OA}$ より

$$\left(\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=0 \Longleftrightarrow \frac{1}{3}|\vec{a}|^2-\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|=0 \quad (\because ①)$$

$\therefore |\vec{b}|=\dfrac{2}{3}|\vec{a}|$ $\therefore t=\dfrac{|\vec{a}|}{\frac{4}{3}|\vec{a}|}=\dfrac{3}{4}$ ------------(答)

(3) PはAD上，BC上にあるので

$$\overrightarrow{OP}=(1-\alpha)\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{OD}=(1-\alpha)\vec{a}+\frac{3}{4}\alpha\vec{b} \quad \text{--------} ②$$

$$\overrightarrow{OP}=(1-\beta)\overrightarrow{OC}+\beta\overrightarrow{OB}=\frac{1-\beta}{3}\vec{a}+\beta\vec{b} \quad \text{--------} ③$$

と表せて，$\vec{a}$，$\vec{b}$は1次独立だから，②，③より

$$1-\alpha=\frac{1-\beta}{3},\quad \frac{3}{4}\alpha=\beta$$

これをα，βについて解くと $\alpha=\dfrac{8}{9}$，$\beta=\dfrac{2}{3}$ となるから

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{9}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$ ------------(答)

$\boxed{3}$ 題意のさいころを振って，1,2,3のいずれかの目が $s$ 回，4の目が $t$ 回，5,6のいずれかの目が $u$ 回出たときのPの座標は

$$s(1,0)+t(0,1)+u(-1,-1)=(s-u,\ t-u)$$

$k$ 回振ったとき，(2,1) にあるから，$k=s+t+u$ … ① であり

$$\begin{cases} s-u=2 \\ t-u=1 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} s=u+2 \\ t=u+1 \end{cases} \cdots ②$$

ここで，$s, t, u$ は 0 以上の整数であるから ①,② より

$$k=3u+3 \geqq 3 \cdots ③$$

である．

(1) $k=1, 2$ は ③ をみたさない $\therefore$ $p_1=p_2=0$ …(答)

$k=3$ のとき，③ より $u=0$，② より $s=2$, $t=1$ である．

題意の確率より，$p_3={}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot a=\frac{3a}{4}$ …(答)

(2) $k=6$ のとき ③より $u=1$ ②より $s=3$, $t=2$ である．

$$\therefore\ p_6=\frac{6!}{3!\cdot 2!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot a^2\cdot\left(\frac{1}{2}-a\right)=\frac{15}{2}\left(-a^3+\frac{1}{2}a^2\right) \cdots (答)$$

(3) $f(a)=-a^3+\frac{1}{2}a^2$ とおく．

$$f'(a)=-3a^2+a=-3a\left(a-\frac{1}{3}\right)$$

| $a$ | $0$ | … | $\frac{1}{3}$ | … | $\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(a)$ | | ↗ | | ↘ | |

$0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ における $f(a)$ の増減表より

$p_6=\frac{15}{2}f(a)$ が最大になるときの $a$ の値は $a=\frac{1}{3}$ …(答)