2009年度　名古屋大学　前期　数学(文系)

$\boxed{1}$

(1) 条件より　$a^2+b^2=1$，$a=\frac{1}{3}$　だから　$b^2=\frac{8}{9}$

$b>0$　だから　$a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{2\sqrt{2}}{3}$　-------------(答)

(2) $S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$ ---(答)

(3) $\overrightarrow{OC}=(x, y, z)$　とすると条件より

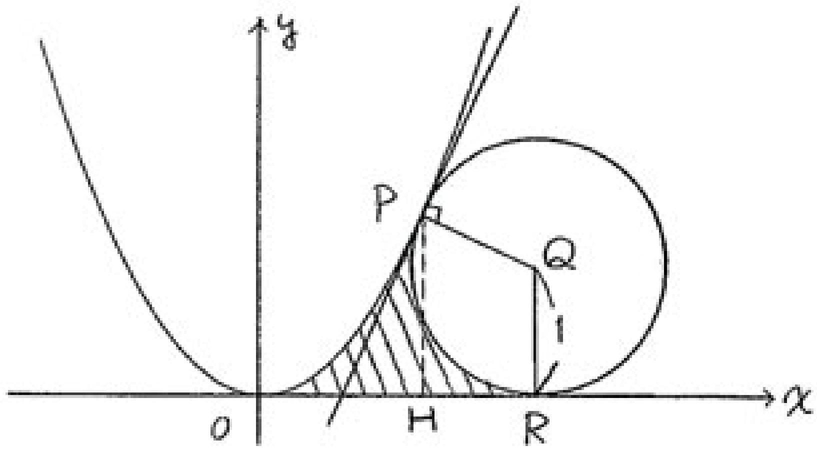
$x^2+y^2+z^2=1$，$x=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}x+\frac{2\sqrt{2}}{3}y=\frac{5}{6}$

$\therefore$ $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$z^2=\frac{1}{4}$

四面体OABCの$\triangle$OABを底面とみたときの高さは$|z|$
だから

$V=\frac{1}{3}S|z|=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{18}$　----------(答)

2



(1) $y=ax^2$ ……①, $y'=2ax$

$Q(b, 1)$, $R(b, 0)$であり，$\angle PQR=120°$，$0<p<b$などから

$$P\left(b-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Pは放物線①上の点だから

$$\frac{3}{2}=a\left(b-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \text{ ……②}$$

また，PQの傾きは $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ であり，Pにおける①の接線の傾きは $\sqrt{3}$ であり

$$2a\left(b-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3} \text{ ……③}$$

②，③より a，b を求めて

$$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ ……(答)}$$

(2) (1)より

$$P\left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$$

であり，$H(\sqrt{3}, 0)$なる点をとると

・①，x軸，PHで囲まれた図形の面積 $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}x^2dx=\frac{\sqrt{3}}{2}$

・台形PQRHの面積 $\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{8}$

・扇形PQRの面積 $\pi\cdot1^2\cdot\frac{120}{360}=\frac{\pi}{3}$

よって，求める面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{3}=\frac{9\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{3} \text{ ……(答)}$$

3

(1) 2回投げた目の積の1の位が0となるのは、「2の目と5の目が1回ずつ」または「4の目と5の目が1回ずつ」または「5の目と6の目が1回ずつ」のときだから

$$P_2(0) = {}_2C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\times 3 = \frac{1}{6} \quad \text{---(答)}$$

1の位が1となるのは、2回とも1の目が出るときだから

$$P_2(1) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} \quad \text{---(答)}$$

1の位が2となるのは、「1の目と2の目が1回ずつ」または「2の目と6の目が1回ずつ」または「3の目と4の目が1回ずつ」のときだから

$$P_2(2) = {}_2C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\times 3 = \frac{1}{6} \quad \text{---(答)}$$

(2) $n+1$回投げた目の積の1の位が1となるのは

(i) n回投げた目の積の1の位が1で、次に1の目が出る.

(ii) n回投げた目の積の1の位が7で、次に3の目が出る.

のいずれかだから

$$P_{n+1}(1) = \frac{1}{6}P_n(1) + \frac{1}{6}P_n(7) \quad \text{---(答)}$$

(3) n回投げた目の積の1の位が1または3または7または9となるのは、n回とも1または3の目(5以外の奇数)が出るときだから

$$P_n(1) + P_n(3) + P_n(7) + P_n(9) = \left(\frac{2}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{---(答)}$$