$\boxed{1}$ $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AE}=(3,0,4s)$ $(0<s<1)$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{CG}=(0,2,4t)$ $(0<t<1)$

線分AC上の点をRとおくと、実数k $(0\leqq k\leqq 1)$を用いて

$$\overrightarrow{AR}=k\overrightarrow{AC}$$

とおけるので

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AC}=(3-3k,2k,0)$$

$$\therefore\ \overrightarrow{DR}=(3-3k,2k,-4)$$

DR⊥(平面OPQ)のとき

$$\begin{cases}\overrightarrow{DR}\cdot\overrightarrow{OP}=9-9k-16s=0\\ \overrightarrow{DR}\cdot\overrightarrow{OQ}=4k-16t=0\end{cases}$$

この2式を満たすkが存在する条件を求めればよい。

kを消去して

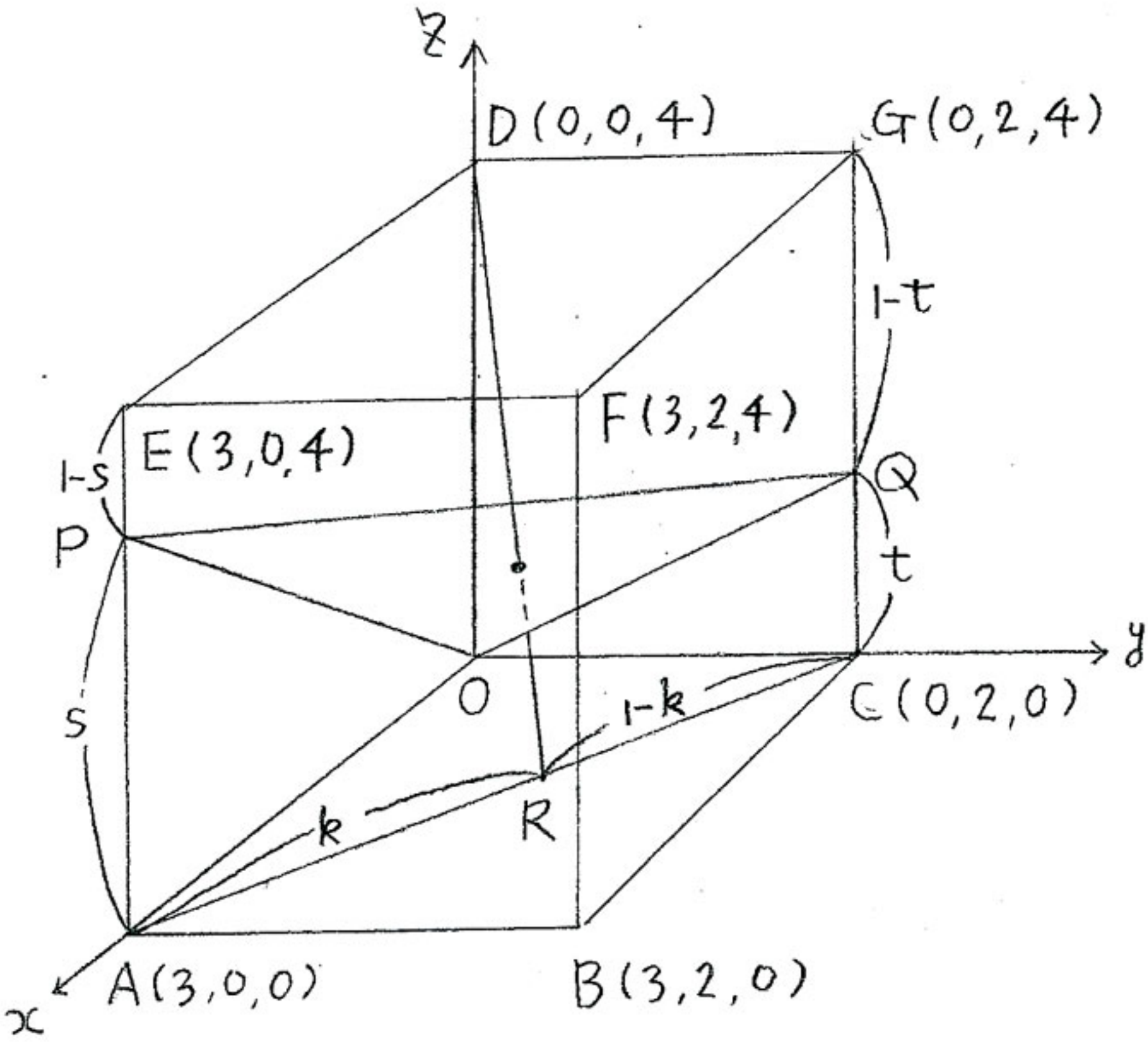
$$16s+36t=9$$

$0\leqq k\leqq 1$ より

$$0\leqq s\leqq\frac{9}{16},\ 0\leqq t\leqq\frac{1}{4}$$

求める条件は

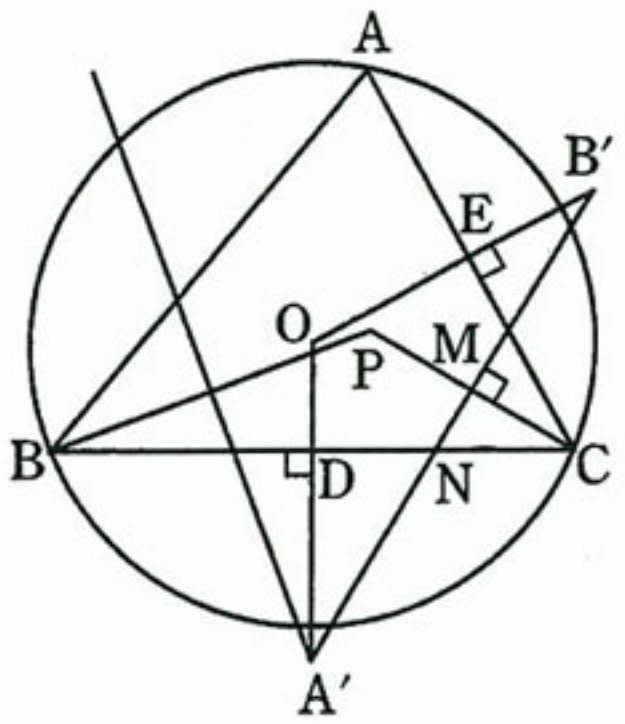
$$16s+36t=9,\ 0<s<\frac{9}{16}\ \left(0<t<\frac{1}{4}\right)\ \text{----(答)}$$



© 駿台予備学校

2

A′は △PBC の外心だから BC の垂直二等分線の上にある．△ABC の外心を O とすると，BC の垂直二等分線は O と A′を通る．同様に CA の垂直二等分線は O と B′を通る．A′B′は PC の垂直二等分線だから，BC の中点を D，CP の中点を M，A′B′と BC の交点を N とすると，△DA′N，△CMN の内角の関係から ∠OA′B′＝∠BCP である．同様に ∠OB′A′＝∠ACP である．



A′，B′が O を中心とする円周上にのるならば △OA′B′が二等辺三角形になる．そのとき ∠OA′B′＝∠OB′A′，∠BCP=∠ACP となり，CP が角 C の二等分線になる．他も同様に考え，A′，B′，C′が O を中心とする円周上にのるならば AP が角 A の二等分線，BP が角 B の二等分線，CP が角 C の二等分線になる．よって P が △ABC の内心である．

P が内心に一致するとき

$$\angle \mathrm{PAB} = \angle \mathrm{PAC},\ \angle \mathrm{PBC} = \angle \mathrm{PBA},\ \angle \mathrm{PCB} = \angle \mathrm{PCA}$$

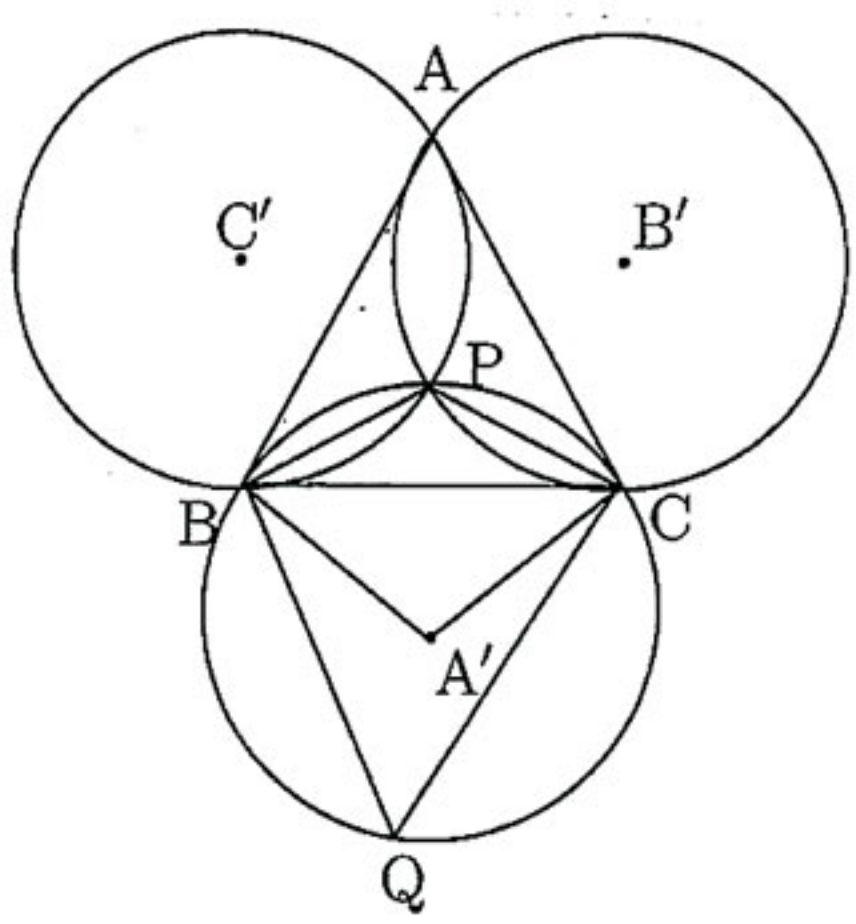
よって

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{BPC} &= 180^\circ - (\angle \mathrm{PBC} + \angle \mathrm{PCB}) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{ACB}) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle \mathrm{BAC}) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle \mathrm{BAC}\end{aligned}$$

円 A′において，点 P を含まない方の弧 BC 上に，点 Q をとると

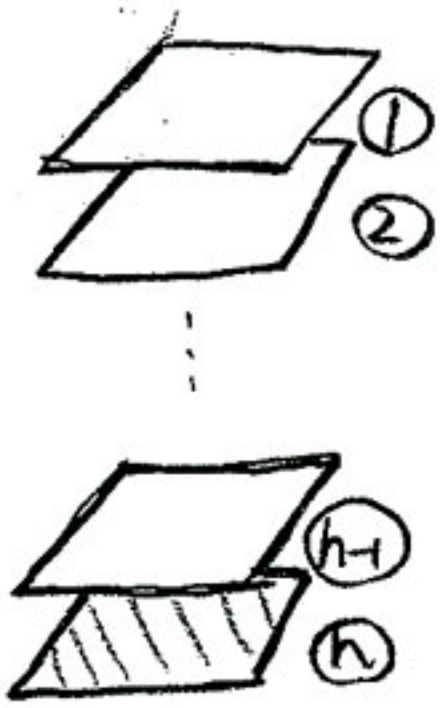
$$\begin{aligned}\angle \mathrm{BA'C} &= 2\angle \mathrm{BQC} = 2(180^\circ - \angle \mathrm{BPC}) = 2\left\{180^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2}\angle \mathrm{BAC})\right\} \\ &= 180^\circ - \angle \mathrm{BAC} \quad \therefore \angle \mathrm{BAC} + \angle \mathrm{BA'C} = 180^\circ\end{aligned}$$

よって，4 点 A，B，A′，C は同一円周上にある．
同様にして，4 点 B，C，B′，A と 4 点 C，A，C′，B はそれぞれ同一円周上にある．
したがって，A，B，C，A′，B′，C′ は同一円周上にある．



© 駿台予備学校

3



n回の試行で番号nのカードが一番上にくるのは、初期状態で番号nのカードの上にあるn-1枚のカードがすべて番号nのカードの下にくるときだから、

n回の試行中、

n-1回は番号nのカードより下に
1回だけ番号nのカードより上に

カードを入れたときである。番号nのカードより上に入れるのをk回目（$1 \leqq k \leqq n$）に行ったときの確率は、

$1 \leqq k \leqq n-1$のとき、

$$\frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \cdots \times \frac{k-1}{n} \times \frac{n-k}{n} \times \frac{k}{n} \times \cdots \times \frac{n-1}{n}$$

$$= \frac{(n-1)!(n-k)}{n^n}$$

$k=n$のとき、

$$\frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n^n}$$

よって求める確率は、

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!(n-k)}{n^n} + \frac{(n-1)!}{n^n} = \frac{(n-1)!(n^2-n+2)}{2n^n} \cdots (答)$$

© 駿台予備学校

4

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$|\overrightarrow{OP_1}| = 1$ より　$a^2 + c^2 = 1$　------①

$ad - bc = 1$ -----② と ケーリー・ハミルトンの定理より

$A^2 = (a+d)A - E$　-------③

よって

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (a+d)A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (a+d)\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$|\overrightarrow{OP_2}| = 1$ より

$$(a+d)^2(a^2+c^2) - 2(a+d)a + 1 = 1$$

$\Leftrightarrow (a+d)(d-a) = 0$　（①より）

$\therefore$ $a+d=0$ または $a=d$

(イ) $a+d=0$ のとき

③より　$A^2 = -E$

これより 正の整数 m に対して

$$A^{2m} = (-1)^m E \quad , \quad A^{2m+1} = (-1)^m A$$

これより

$$\overrightarrow{OP_{2m}} = A^{2m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)^m\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore |\overrightarrow{OP_{2m}}| = 1$$

$$\overrightarrow{OP_{2m+1}} = A^{2m+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)^m\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

①より $|\overrightarrow{OP_{2m+1}}| = 1$ （これは $m=0$ のときも正しい）

したがって すべての自然数 n に対して

$$|\overrightarrow{OP_n}| = 1$$

© 駿台予備学校

(ロ) $a=d$ のとき

$$② \Leftrightarrow a^2-bc=1 \Leftrightarrow a^2=bc+1$$

これと①より

$$bc+1+c^2=1 \Leftrightarrow c(b+c)=0$$

$$\therefore\ c=0 \text{ または } c=-b$$

(i) $c=0$ のとき

$$① \Leftrightarrow a^2=1 \quad \therefore a=\pm 1$$

よって $A=\begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ (複号同順)

となるので

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これをくり返し用いると

$$\overrightarrow{OP_n}=A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=(\pm 1)^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

だから $|\overrightarrow{OP_n}|=1$ が成り立つ

(ii) $c=-b$ のとき

①より $a=\cos\theta$, $c=\sin\theta$ となる θ が存在する

よって $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

これより $A^n=\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$ だから

$$\overrightarrow{OP_n}=A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$$

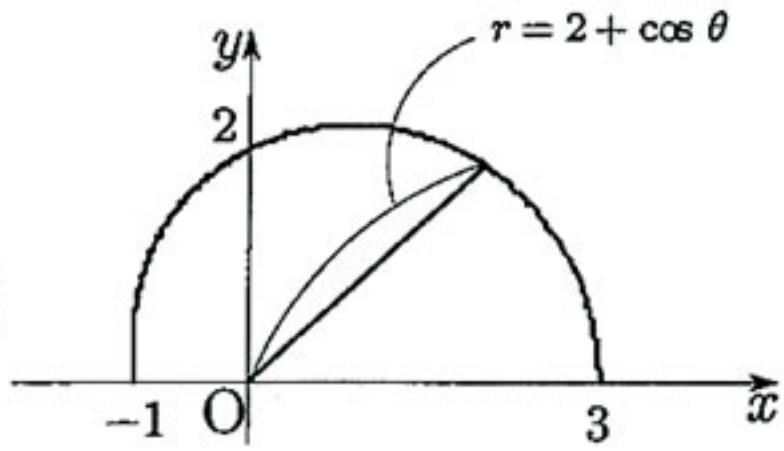
よって $|\overrightarrow{OP_n}|=1$ が成り立つ

(イ)(ロ)あわせて証明終り

© 駿台予備学校

$\boxed{5}$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = (2+\cos\theta)\cos\theta \\ y = r\sin\theta = (2+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$



$\dfrac{dx}{d\theta} = -2(1+\cos\theta)\sin\theta \leqq 0$ より求めるべき体積を V とすれば,

$$V = \pi\int_{-1}^{3} y^2\,dx$$

$$= \pi\int_{\pi}^{0}(2+\cos\theta)^2(1-\cos^2\theta)\cdot(-2)(1+\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$= 2\pi\int_{0}^{\pi}(2+\cos\theta)^2(1-\cos^2\theta)(1+\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$\cos\theta = t$ とおけば,

θ	$0 \to \pi$
t	$1 \to -1$

$dt = -\sin\theta\,d\theta$

より

$$V = -2\pi\int_{1}^{-1}(2+t)^2(1-t^2)(1+t)\,dt$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1}(4+8t+t^2-7t^3-5t^4-t^5)\,dt$$

$$= 4\pi\int_{0}^{1}(4+t^2-5t^4)\,dt = 4\pi\left[4t+\frac{1}{3}t^3-t^5\right]_0^1$$

$$= \frac{40}{3}\pi$$ ……(答)

© 駿台予備学校

6

（1）　$a_1=a$ ，　$b_1=b$

$(a+b\sqrt{2})^2=a^2+2b^2+2ab\sqrt{2}$ ，　$\sqrt{2}$ は無理数で a, b は整数だから

$$a_2=a^2+2b^2,\ b_2=2ab$$

a は奇数，$2b^2$ は偶数だから $a_2=a^2+2b^2$ は奇数である．

a_2 と b_2 が互いに素でないと仮定する．その共通な素数の約数の 1 つを p とする．a_2 は奇数だから p は奇数である．$b_2=2ab$ が p の倍数だから a か b が p の倍数である．$a^2+2b^2=(p$ の倍数$)$……①

だから

a が p の倍数ならば $2b^2$ が p の倍数．よって b が p の倍数，ゆえに a, b がともに p の倍数になり，互いに素であることに反する．

b が p の倍数ならば ① より a^2 が p の倍数．よって a が p の倍数，ゆえに a, b がともに p の倍数になり，やはり矛盾する．

よって a_2 と b_2 は互いに素である．

（2）　$a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}=(a+b\sqrt{2})^{n+1}$

$=(a+b\sqrt{2})^n(a+b\sqrt{2})=(a_n+b_n\sqrt{2})(a+b\sqrt{2})$

$=a\cdot a_n+2b\cdot b_n+(a\cdot b_n+b\cdot a_n)\sqrt{2}$

より

$$a_{n+1}=a\cdot a_n+2b\cdot b_n \cdots\cdots ②,\quad b_{n+1}=b\cdot a_n+a\cdot b_n \cdots\cdots ③$$

「a_n は奇数」……Ⓐ

は $n=1$ で成り立つ．$n=k$ で成り立つとすると

$$a_{k+1}=a\cdot a_k+2b\cdot b_k$$

で，a は奇数，a_k は奇数だから $a\cdot a_k$ は奇数，$2b\cdot b_k$ は偶数だから a_{k+1} は奇数である．

よって Ⓐ は $n=k+1$ で成り立つから数学的帰納法により証明された．

「a_n, b_n は互いに素」……Ⓑ

は $n=1, 2$ で成り立つ．Ⓑ が $n=k+2$ で初めて成り立たなくなると仮定する．すなわち $n=1, \cdots\cdots, k, k+1$ までは成り立つが $n=k+2$ では成り立たなくなるとする．a_{k+2} と b_{k+2} が互いに素でないからその共通の

© 駿台予備学校

素数の約数の１つを p とする．a_{k+2} は奇数だから p は奇数である．

$$a_{k+2}=a\cdot a_{k+1}+2b\cdot b_{k+1}\ \cdots\cdots④,\quad b_{k+2}=b\cdot a_{k+1}+a\cdot b_{k+1}\ \cdots\cdots⑤$$

④ から $b_{k+1}=\dfrac{a_{k+2}-a\cdot a_{k+1}}{2b}$ となり，これを ⑤ に代入すると

$$b_{k+2}=b\cdot a_{k+1}+a\cdot\frac{a_{k+2}-a\cdot a_{k+1}}{2b}$$

$$\therefore\quad a\cdot a_{k+2}-2b\cdot b_{k+2}=(a^2-2b^2)a_{k+1}\ \cdots\cdots⑥$$

④ から $a_{k+1}=\dfrac{a_{k+2}-2b\cdot b_{k+1}}{a}$ で，これを ⑤ に代入すると

$$b\cdot b_{k+2}-b\cdot a_{k+2}=(a^2-2b^2)b_{k+1}\ \cdots\cdots⑦$$

⑥，⑦ の左辺は p の倍数だから右辺も p の倍数．

a_{k+1} と b_{k+1} は互いに素だから a^2-2b^2 が p の倍数である．

$b_{k+1}=\dfrac{a_{k+2}-a\cdot a_{k+1}}{2b}$ と $b_k=\dfrac{a_{k+1}-a\cdot a_k}{2b}$ を

$b_{k+1}=b\cdot a_k+a\cdot b_k$ に代入して

$$\frac{a_{k+2}-a\cdot a_{k+1}}{2b}=b\cdot a_k+a\cdot\frac{a_{k+1}-a\cdot a_k}{2b}$$

$$a_{k+2}-2a\cdot a_{k+1}+(a^2-2b^2)a_k=0$$

a_{k+2} と $(a^2-2b^2)a_k$ が p の倍数だから $2a\cdot a_{k+1}$ が p の倍数．よって $a\cdot a_{k+1}$ が p の倍数．

同様に　$b_{k+2}-2a\cdot b_{k+1}+(a^2-2b^2)b_k=0$

も成り立つから $a\cdot b_{k+1}$ も p の倍数．$a\cdot a_{k+1}$，$a\cdot b_{k+1}$ がともに p の倍数であり，a_{k+1} と b_{k+1} は互いに素だから a が p の倍数．a^2-2b^2 が p の倍数だから b も p の倍数になり，a，b がともに p の倍数になり矛盾する，

ゆえに Ⓑ は成り立つ．

© 駿台予備学校