1 問 1

$\overrightarrow{CP} = t\,\overrightarrow{CB}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ とおくと

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + t\,\overrightarrow{CB} = (3t,\ 2,\ 0)$

$\therefore\ \overrightarrow{DP} = (3t,\ 2,\ -a)$

DP⊥(平面 OEG) より

$$\begin{cases} \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{OE} = 9t - a^2 = 0 \\ \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{OG} = 4 - a^2 = 0 \end{cases}$$

$a > 0$ より　$a = 2$ ---(答)

$t = \dfrac{4}{9}$ より　$P\left(\dfrac{4}{3},\ 2,\ 0\right)$ ----(答)

問2　k回目にゲームを行う場合($k=1, 2, \cdots$), 袋の中には白球が2個, 赤球がk個ある. このとき, 成功する確率は

$$\frac{1}{{}_{k+2}C_2} = \frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

であるから, 失敗する確率は

$$1 - \frac{2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)}$$

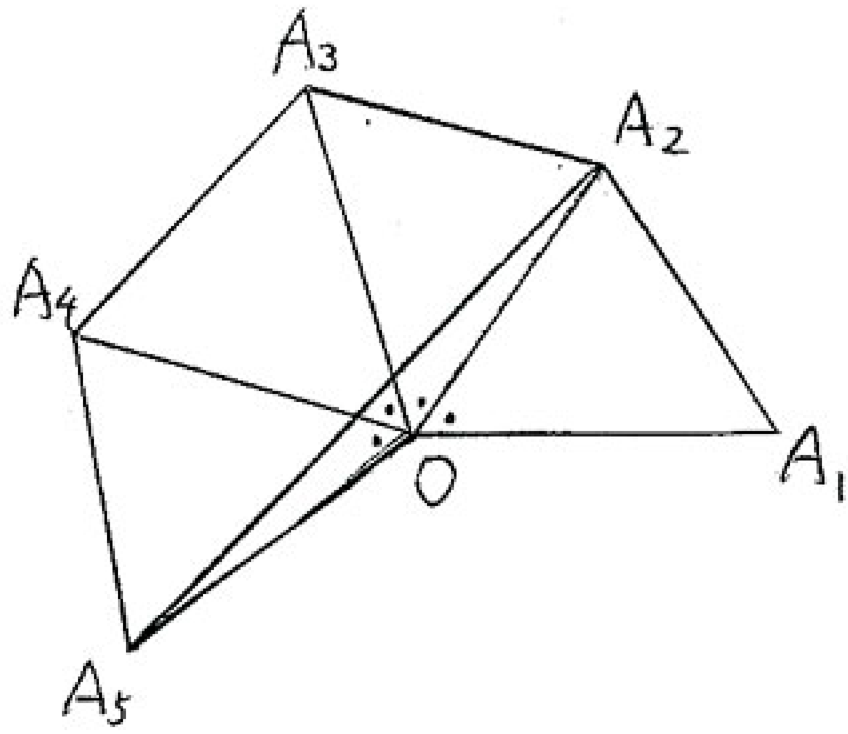
よって, 求める確率は

$$\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\cdot\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n-1)!\cdot(n+2)!}{(n+1)!\cdot(n+2)!}\cdot\frac{2!\cdot 2}{3!} = \frac{2}{3n(n+1)} \quad \text{---(答)}$$

©駿台予備学校

$\boxed{2}$



$\angle A_1OA_2=\theta$ とすると $0<\theta<\pi$

i) $0<\theta<\frac{\pi}{3}$ のとき

$\angle A_2OA_5=3\theta$, $OA_5=OA_1$

より m を正の整数として

$$\frac{\triangle OA_2A_5}{\triangle OA_1A_2}=m \iff \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}=m$$

$$\iff 3-4\sin^2\theta=m$$

$$\iff \sin^2\theta=\frac{3-m}{4}$$

$0<\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$ より $0<\frac{3-m}{4}<\frac{3}{4}$ だから $m=1, 2$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad\therefore \theta=\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$

ii) $\frac{\pi}{3}\leqq\theta<\frac{2}{3}\pi$ のとき $\angle A_2OA_5=2\pi-3\theta$ より，同様にして

$$\frac{\sin(2\pi-3\theta)}{\sin\theta}=m \iff \sin^2\theta=\frac{m+3}{4}$$

$m>0$, $\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\theta\leqq 1$ より $m=1$, $\sin\theta=1$ $\quad\therefore \theta=\frac{\pi}{2}$

iii) $\frac{2}{3}\pi\leqq\theta<\pi$ のとき $\angle A_2OA_5=3\theta-2\pi$ より，同様にして

$$\frac{\sin(3\theta-2\pi)}{\sin\theta}=m \iff \sin^2\theta=\frac{3-m}{4}$$

よって，$m=1, 2$ であり $\theta=\frac{5}{6}\pi, \frac{3}{4}\pi$

以上より

$\angle A_1OA_2=\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{6}\pi$ ---------- (答)

© 駿台予備学校

3 $X=\log_2 x$, $Y=\log_2 y$ とおくと、与不等式より

$$\frac{Y}{X}+\frac{X}{Y}>2+\frac{1}{X}\cdot\frac{1}{Y}$$

$$\iff \frac{Y^2+X^2-(2XY+1)}{XY}>0$$

$$\iff \frac{(Y-X)^2-1}{XY}>0 \quad \cdots ①$$

(i)「$0<x<1$, $0<y<1$」または「$1<x$, $1<y$」…② のとき

$XY>0$, ①より $(Y-X)^2>1$ であるから

$$\log_2\frac{y}{x}<-1 \quad \text{または} \quad 1<\log_2\frac{y}{x}$$

$$\iff 0<\frac{y}{x}<\frac{1}{2} \quad \text{または} \quad 2<\frac{y}{x} \quad \cdots ③$$

(ii) $0<x<1<y$ または $0<y<1<x$ …④ のとき

$XY<0$, ①より $(Y-X)^2<1$ であるから

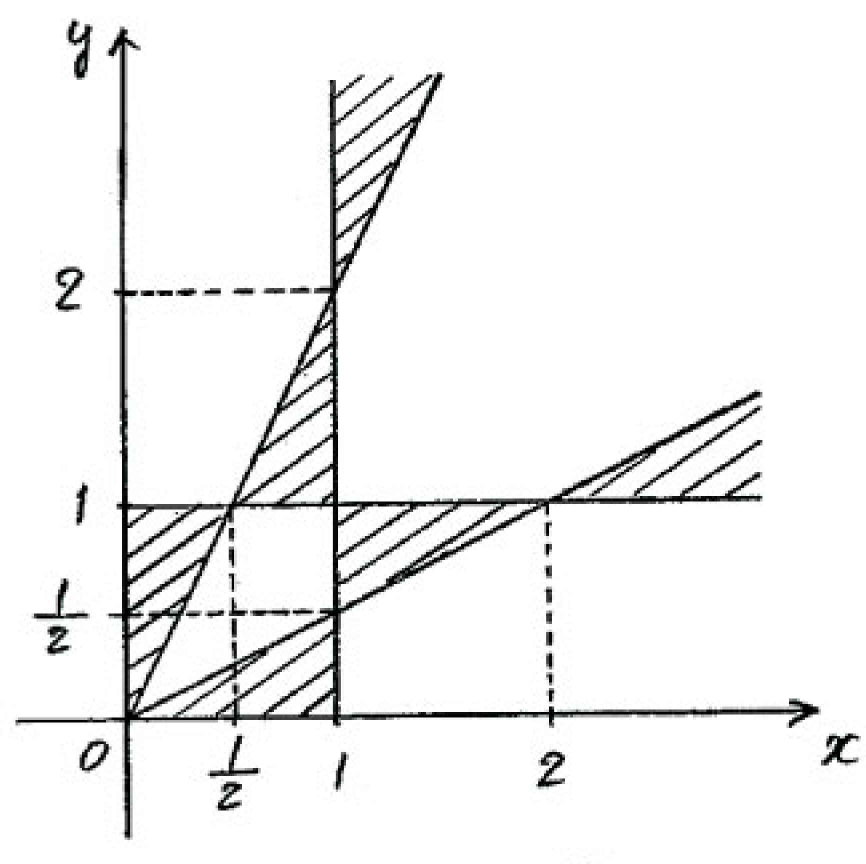
$$-1<\log_2\frac{y}{x}<1$$

$$\iff \frac{1}{2}<\frac{y}{x}<2 \quad \cdots ⑤$$

(i), (ii)より 題意の (x, y) の範囲は

「②かつ③」または「④かつ⑤」

であり、これを図示すると、右図の斜線部分で、境界は含まない。



…(答)

© 駿台予備学校

4

$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{OP_2}| = 1$ より　$a^2 + c^2 = 1$ ------①

$ad - bc = 1$ -----② とケーリー・ハミルトンの定理より

$A^2 = (a+d)A - E$ ------③

よって

$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (a+d) A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= (a+d) \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{OP_3}| = 1$ より

$(a+d)^2(a^2+c^2) - 2(a+d)a + 1 = 1$

$\Leftrightarrow (a+d)(d-a) = 0$　（①より）

$\therefore$ $a+d=0$ または $a=d$

(i) $a+d=0$ のとき

③より　$A^2 = -E$

これより 正の整数 m に対して

$A^{2m} = (-1)^m E$, $A^{2m+1} = (-1)^m A$（$m=0$ のときも正しい）

よって

$\begin{cases} \overrightarrow{OP_{2m}} = A^{2m-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)^{m-1} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{OP_{2m+1}} = A^{2m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)^m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

だから $|\overrightarrow{OP_{2m}}| = 1$（①より），$|\overrightarrow{OP_{2m+1}}| = 1$（$m=0$ のときも正しい）

したがって すべての自然数 n に対して

$$|\overrightarrow{OP_n}| = 1$$

(ロ) $a=d$ のとき

$$②\iff a^2-bc=1 \iff a^2=bc+1$$

これと①より

$$bc+1+c^2=1 \iff c(b+c)=0$$

$\therefore$ $c=0$ または $c=-b$

(i) $c=0$ のとき

$$①\iff a^2=1 \quad \therefore a=\pm 1$$

よって $A=\begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ (複号同順)

となるので

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これをくり返し用いると

$$\overrightarrow{OP_n}=A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=(\pm 1)^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

だから $|\overrightarrow{OP_n}|=1$ が成り立つ

(ii) $c=-b$ のとき

①より $a=\cos\theta$, $c=\sin\theta$ となる θ が存在する

よって $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

これより $A^n=\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$ だから

$$\overrightarrow{OP_n}=A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(n-1)\theta \\ \sin(n-1)\theta \end{pmatrix}$$

よって $|\overrightarrow{OP_n}|=1$ が成り立つ

(イ)(ロ) あわせて 証明終り

© 駿台予備学校

$\boxed{5}$

p は素数だから，題意の数は $(p^n)!$ を素因数分解したときの p の指数 N である．

1 以上 p^n 以下の自然数で，p^k で割り切れるが p^{k+1} で割り切れないものの集合を A_k，その要素の個数を $N(A_k)$ とすれば，

$$N(A_k)=\begin{cases}\dfrac{p^n}{p^k}-\dfrac{p^n}{p^{k+1}} & (1 \leqq k \leqq n-1 \text{のとき}) \\ 1 & (k=n \text{のとき})\end{cases}$$

A_k の要素を素因数分解したときの p の指数はちょうど k だから，

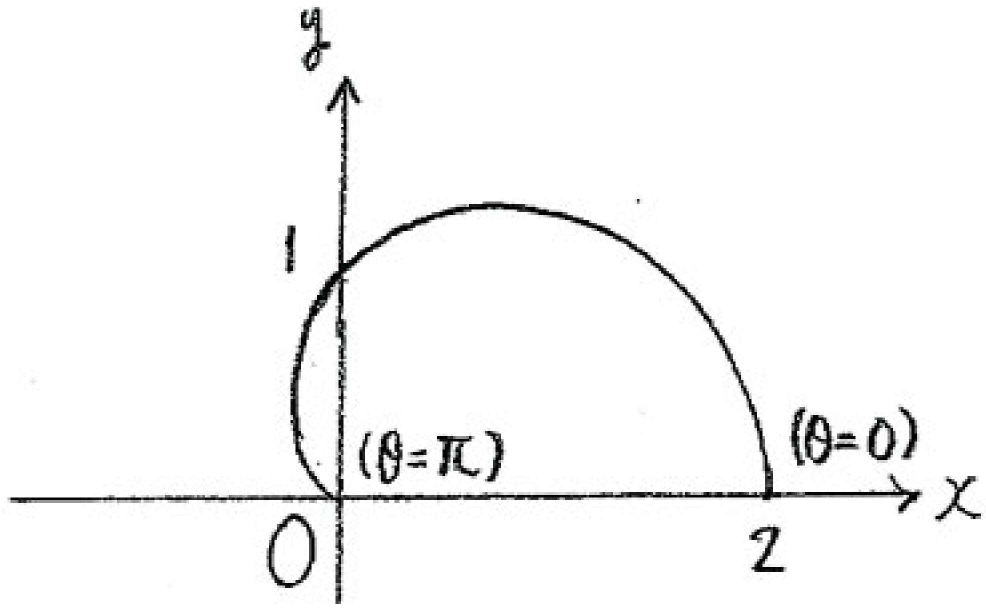
$$\begin{aligned}
N&=\sum_{k=1}^{n} kN(A_k) \\
&=1\cdot\left(\frac{p^n}{p}-\frac{p^n}{p^2}\right)+2\cdot\left(\frac{p^n}{p^2}-\frac{p^n}{p^3}\right)+\cdots+k\cdot\left(\frac{p^n}{p^k}-\frac{p^n}{p^{k+1}}\right)+\cdots \\
&\qquad+(n-1)\cdot\left(\frac{p^n}{p^{n-1}}-\frac{p^n}{p^n}\right)+n\cdot 1 \\
&=\frac{p^n}{p}+\frac{p^n}{p^2}+\cdots+\frac{p^n}{p^k}+\cdots+\frac{p^n}{p^n} \\
&=1+p+p^2+\cdots+p^{n-1} \\
&=\frac{p^n-1}{p-1}
\end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (答)

© 駿台予備学校

6 $r = 1 + \cos\theta \ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を xy 座標になおすと

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = (1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = r\sin\theta = (1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = -(\sin\theta + \sin 2\theta) \\ \dfrac{dy}{d\theta} = \cos\theta + \cos 2\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \sin^2\theta + 2\sin\theta\sin 2\theta + \sin^2 2\theta \\ &\quad + \cos^2\theta + 2\cos\theta\cos 2\theta + \cos^2 2\theta \\ &= 2 + 2(\cos\theta\cos 2\theta + \sin\theta\sin 2\theta) \\ &= 2 + 2\cos(2\theta - \theta) \\ &= 2 + 2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right) \\ &= 4\cos^2\frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

求める曲線の長さは

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta &= \int_0^\pi \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta \\ &= \int_0^\pi 2\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta \end{aligned}$$

$\left(0 \leqq \theta \leqq \pi \text{ のとき } \cos\frac{\theta}{2} \geqq 0 \text{ より} \right)$

$$\begin{aligned} &= \left[4\sin\frac{\theta}{2} \right]_0^\pi \\ &= 4 \end{aligned}$$

$= 4$ …… (答)

© 駿台予備学校