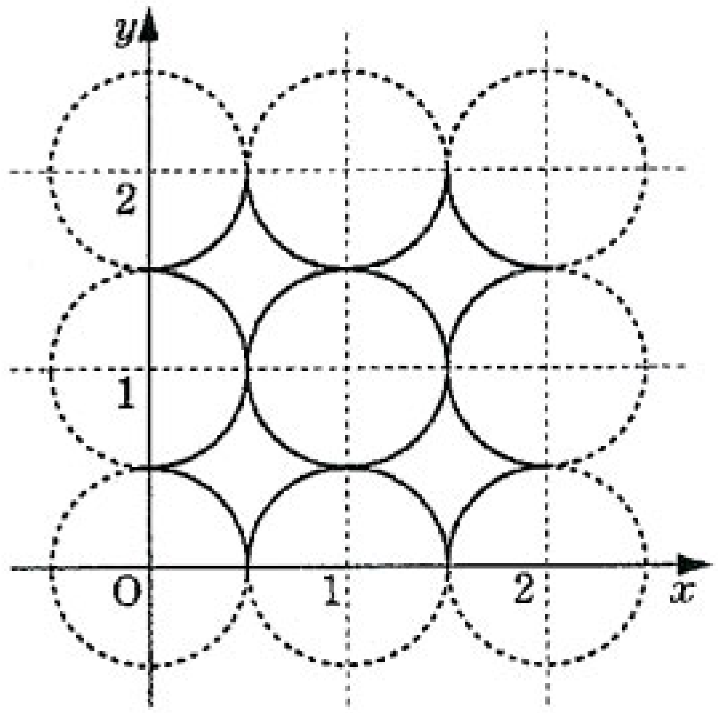
1



(1)　C_1 が内部に格子点を含まない条件は，C_1 の中心 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が任意の格子点Aに対して $\mathrm{PA} \geqq 0.5$ を満たすこと，すなわち，Pが任意の格子点Aを中心とする半径0.5の円の周または外部にあることである．

よって，$0 \leqq x \leqq 2$，$0 \leqq y \leqq 2$ も考えると，Pの存在範囲は右図の網目部分（境界を含む）のようになる．……（答）

(2)　座標平面上の1辺の長さが1の正方形（周を含む）を単位正方形と呼ぶことにすると，辺が座標軸に平行な単位正方形は必ず格子点を含む．　……①

C_2 の直径は1.5であり $\sqrt{2}$ よりも大きいから，中心をどのような位置に移動させても，C_2 の内部に含まれ辺が座標軸に平行な単位正方形が存在する．

よって，①より，C_2 は中心をどのような位置に移動させても必ず内部に格子点を含む．

（証明終わり）

(3)　座標空間内の1辺の長さが1の立方体（表面を含む）を単位立方体と呼ぶことにすると，面が座標平面に平行な単位立方体は必ず格子点を含む．　……②

S の直径 $2r$ が $\sqrt{3}$ より大きい（つまり，$r > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である）とき，中心をどのような位置に移動させても，S の内部に含まれ面が座標平面に平行な単位立方体が存在する．

よって，②より，S は中心をどのような位置に移動させても必ず内部に格子点を含む．

S の直径 $2r$ が $\sqrt{3}$ 以下である（つまり，$r \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である）とき，中心を $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ に移動させると，S は内部に格子点を含まない．

以上より，求める範囲は，

$$r > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

……（答）

2

(1)
$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+3) - f(x) \\ &= \{a(x+3)^2 + b(x+3) + c\} - (ax^2 + bx + c) \\ &= 6ax + (9a + 3b) \end{aligned}$$

であるから，$a>0$より，$g(x)$は１次式である．

ここで，$f(x)$が条件Ｃを満たすとき，$f(1), f(4), f(2), f(5)$はすべて整数ゆえ，

$$g(1) = f(4) - f(1) = 6a + (9a + 3b)$$
$$g(2) = f(5) - f(2) = 12a + (9b + 3a)$$

は共に整数であるから，

$$g(2) - g(1) = 6a,\quad 2g(1) - g(2) = 9a + 3b$$

は整数である．

以上より，$g(x)$は係数および定数項が整数となる１次式である．

（証明終わり）

(2) $6a$が整数かつ$9a+3b$が整数のもとで，$f(1)=a+b+c$，$f(-1)=a-b+c$が共に整数であれば，(1)より，帰納的に，

$$f(3i+1),\ f(3i-1)\ \ (i:\text{整数})$$

はすべて整数となり，$f(x)$は条件Ｃを満たす．

逆に$f(x)$が条件Ｃを満たすならば，$f(1)=a+b+c, f(-1)=a-b+c$は整数であり，(1)より，$g(x)$の係数$6a$および定数項$9a+3b$は整数である．

すなわち，

$$\text{C} \Leftrightarrow 6a,\ 9a+3b,\ a+b+c,\ a-b+c\ \ \text{がいずれも整数} \quad \cdots\cdots(*)$$

である．

条件Ｃを満たす$f(x)$に対して，$a+b+c=1$のとき$a-b+c=N$ (N:整数)とおくと，

$$2b = 1 - N \quad \cdots\cdots① \quad \text{かつ} \quad 2(a+c) = 1 + N \quad \cdots\cdots②$$

であるから，a, b, cが正であることより，

$$1 - N > 0 \quad \text{かつ} \quad 1 + N > 0$$
$$\therefore \quad -1 < N < 1$$

となり，Nが整数であることより，

$$N = 0 \quad \cdots\cdots③$$

である．①，③より，

$$2b=1 \qquad \therefore \quad b=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ④$$

②，③より，

$$2(a+c)=1 \qquad \therefore \quad c=\frac{1}{2}-a \quad \cdots\cdots ⑤$$

であり，⑤において，a, cが正であることより，

$$\frac{1}{2}-a>0,\quad a>0 \qquad \therefore \quad 0<6a<3$$

であるから，$6a$が正の整数であることを考えれば，

$$6a=1, 2 \qquad \therefore \quad a=\frac{1}{6}, \frac{1}{3}$$

となるが，$9a+3b=9a+\frac{3}{2}$が整数であることより，

$$a=\frac{1}{6}$$

である．よって，④，⑤より，

$$(a, b, c)=\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \quad \cdots\cdots ⑥$$

であり，求める$f(x)$は，

$$f(x)=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) ⑥の(a, b, c)に対して，

$$m_1b=m_1\cdot\frac{1}{2}=\frac{m_1}{2},\quad m_2a+m_3b=m_2\cdot\frac{1}{6}+m_3\cdot\frac{1}{2}=\frac{m_2+3m_3}{6}$$

が共に整数となるような自然数の組(m_1, m_2, m_3)のうち，$m_1+m_2+m_3$が最小となるものは，

$$m_1=2 \quad かつ \quad m_2+3m_3=6$$

を満たし，このような自然数の組は，

$$(m_1, m_2, m_3)=(2, 3, 1) \quad \cdots\cdots ⑦$$

のみである．

いま，(＊)より，

$\mathrm{C} \Leftrightarrow 6a, 9a+3b, a+b+c, a-b+c$がいずれも整数

$\Leftrightarrow 6a, (9a+3b)-6a=3a+3b, (a+b+c)-(a-b+c)=2b, a+b+c$ がいずれも整数

$\Leftrightarrow 6a, (3a+3b)-2b=3a+b, 2b, a+b+c$がいずれも整数

であり，$6a=2(3a+b)-2b$であるから，

$\mathrm{C} \Leftrightarrow 2b, 3a+b, a+b+c$ がいずれも整数

である．⑦のとき，これは条件C′と同値である．

したがって，求める自然数の組は，

$$(m_1, m_2, m_3) = (2, 3, 1) \qquad \cdots\cdots(答)$$

(4) (3)の結果より，

$2b, 3a+b$ が共に整数であり，かつ $a+b+c=n$

となるような (a, b, c) の組の個数を求めればよい．

$2b=l, 3a+b=m$ （l, m は整数）とおくと，

$$a=-\frac{l}{6}+\frac{m}{3}, \quad b=\frac{l}{2}$$

であり，このとき，$a+b+c=n$ とから，

$$\left(-\frac{l}{6}+\frac{m}{3}\right)+\frac{l}{2}+c=n$$

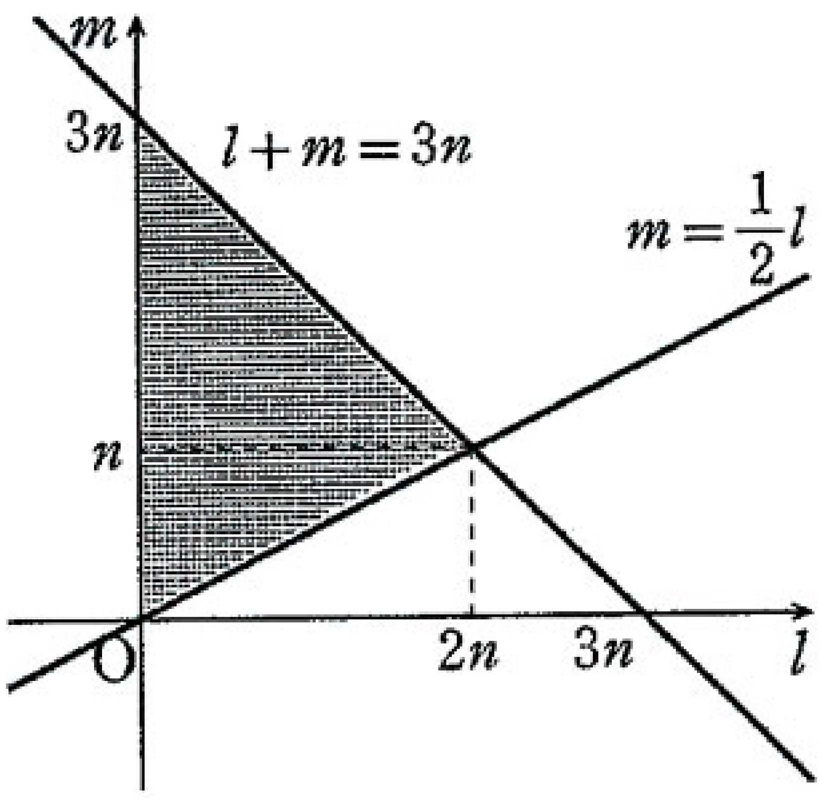
$$\therefore \quad c=-\frac{l}{3}-\frac{m}{3}+n$$

となるから，$a>0, b>0, c>0$ より，

$$-\frac{l}{6}+\frac{m}{3}>0, \quad \frac{l}{2}>0, \quad -\frac{l}{3}-\frac{m}{3}+n>0$$

$$\therefore \quad 0<\frac{l}{2}<m<-l+3n$$

この不等式が表す lm 平面上の領域は右図の網目部分（境界は除く）であり，求める個数はこの領域に含まれる格子点の個数である．



これらの格子点 (l, m) のうち，$m=k$ $(k=1, 2, \cdots\cdots, n)$ となるものは $0<l<2k$ を満たすから $2k-1$ 個であり，$m=k$ $(k=n+1, n+2, \cdots\cdots, 3n-1)$ となるものは，$0<l<3n-k$ を満たすから $3n-k-1$ 個である．

よって，求める個数は

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+\sum_{k=n+1}^{3n-1}(3n-k-1)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\{1+(2n-1)\}\cdot n+\frac{1}{2}\cdot\{(2n-2)+0\}\cdot(2n-1)$$

$$=3n^2-3n+1 \qquad \cdots\cdots(答)$$

3

(1)　$f(x)=\sin 2x+a\cos x$ より，

$$f'(x)=2\cos 2x-a\sin x=2(1-2\sin^2 x)-a\sin x=-4\sin^2 x-a\sin x+2$$

であるから，$t=\sin x$，$g(t)=-4t^2-at+2$ とおくと $f'(x)$ と $g(t)$ の符号は一致し，x が $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ まで動くとき，t は -1 から 1 まで単調に増加する．

したがって，$g(0)=2>0$ であることに注意すると，

$f(x)$ が区間 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ の相異なる2点で極値を持つ

$\Leftrightarrow$ $f'(x)$ が区間 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ で2回符号変化する

$\Leftrightarrow$ $g(t)=0$ が $-1<t<1$ に相異なる2解をもつ

$\Leftrightarrow$ $g(-1)=a-2<0$ かつ $g(1)=-a-2<0$

より，求める a の値の範囲は，

$-2<a<2$ ……(答)

(2)　$f(x)=\sin 2x+a\cos x=2\sin x\cos x+a\cos x=(2\sin x+a)\cos x$

いま，$-2<a<2$ のもとで $2\sin x+a=0$ となる x が $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ にただひとつ存在するから，それを x_0 とおくと，$\sin x_0=-\frac{a}{2}$ ……①であり，

$-\frac{\pi}{2}<x\leqq x_0$ のとき $f(x)\leqq 0$，$x_0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ のとき $f(x)\geqq 0$ ……②

である．

したがって，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|f(x)|dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x_0}\{-(\sin 2x+a\cos x)\}dx+\int_{x_0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x+a\cos x)dx$$

$$=-\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+a\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{x_0}+\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+a\sin x\right]_{x_0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\left(-\frac{1}{2}\cos 2x_0+a\sin x_0\right)\cdot 2+\left(\frac{1}{2}-a\right)+\left(\frac{1}{2}+a\right)$$

$$=(1-2\sin^2 x_0)-2a\sin x_0+1$$

$$=-2\sin^2 x_0-2a\sin x_0+2$$

$$=-2\left(-\frac{a}{2}\right)^2-2a\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)+2 \qquad (\because ①)$$

$$=\frac{1}{2}a^2+2$$ ……(答)

(3) ②および，$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ であることより，

$$\alpha<x\leqq x_0 \text{ のとき } f(x)\leqq 0,\quad x_0\leqq x<\beta \text{ のとき } f(x)\geqq 0$$

である．また，$\sin\alpha, \sin\beta$ は $g(t)=0$ の 2 解であるから，

$$\sin\alpha+\sin\beta=-\frac{a}{4},\ \sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}$$

となる．

したがって，

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta |f(x)|dx\\
&=\int_\alpha^{x_0}\{-(\sin 2x+a\cos x)\}dx+\int_{x_0}^\beta(\sin 2x+a\cos x)dx\\
&=-\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+a\sin x\right]_\alpha^{x_0}+\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+a\sin x\right]_{x_0}^\beta\\
&=-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)+a(\sin\alpha+\sin\beta)-\left(-\frac{1}{2}\cos 2x_0+a\sin x_0\right)\cdot 2\\
&=(\sin^2\alpha+\sin^2\beta-1)+a(\sin\alpha+\sin\beta)+\cos 2x_0-2a\sin x_0\\
&=\{(\sin\alpha+\sin\beta)^2-2\sin\alpha\sin\beta-1\}+a(\sin\alpha+\sin\beta)+(1-2\sin^2 x_0)-2a\sin x_0\\
&=\left\{\left(-\frac{a}{4}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right\}+a\cdot\left(-\frac{a}{4}\right)+\left\{1-2\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)^2\right\}-2a\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)\\
&=\frac{5}{16}a^2+1 \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$