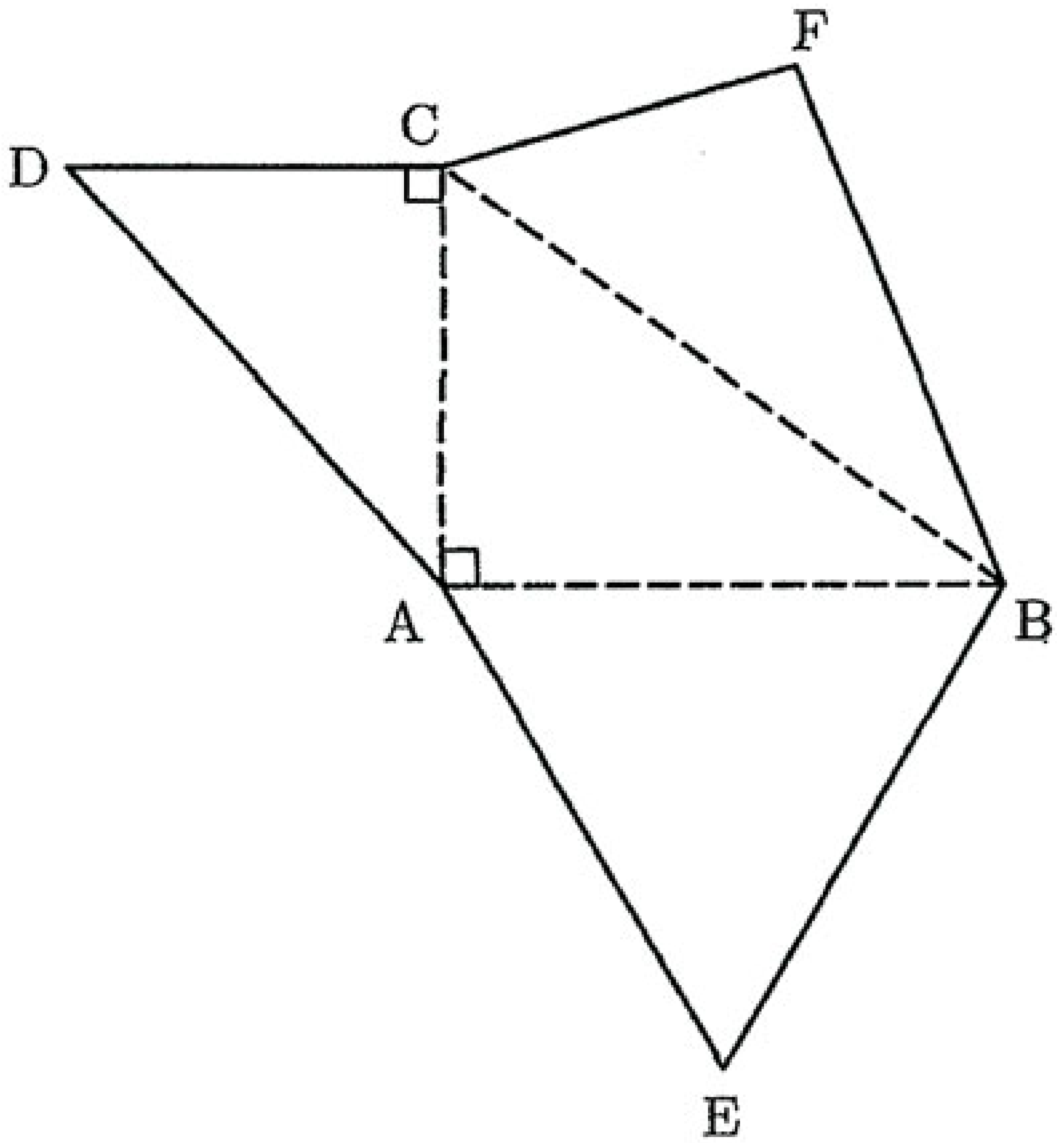
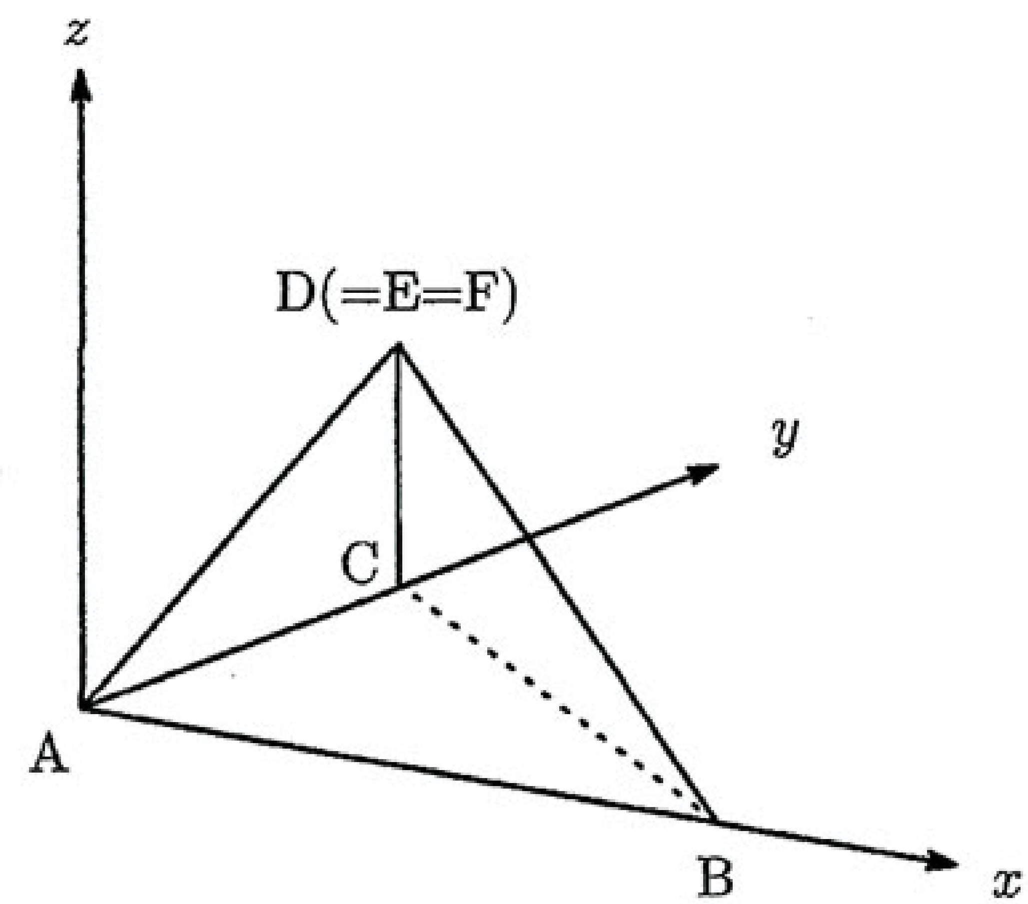
1





三角錐 V を作ると 3 点 D,E,F は一点に集まることから

$\mathrm{AE}=\mathrm{AD}=\mathrm{BE}=\mathrm{BF}=4$, $\mathrm{CD}=\mathrm{CF}$

$\triangle\mathrm{ACD}$ は直角三角形なので, $\mathrm{CD}=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{AC}^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}^2$ より, $\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$

よって, $\triangle$ ABC を底面とするとき, 高さを求めるために

$\mathrm{A}(0,0,0)$, $\mathrm{B}(4,0,0)$, $\mathrm{C}(0,3,0)$, $\mathrm{D}(x,y,z)$ $(z>0)$ とおくと

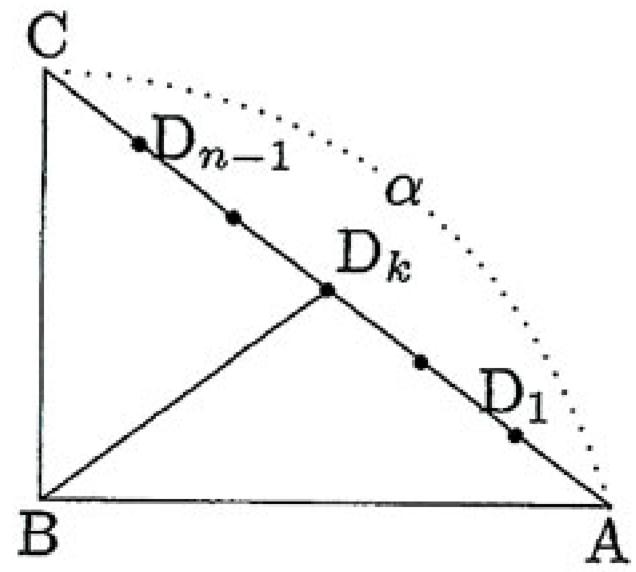
$$\left\{\begin{array}{lll}\mathrm{AD}^2 & =x^2+y^2+z^2 & =4^2\\ \mathrm{BD}^2 & =(x-4)^2+y^2+z^2 & =4^2\\ \mathrm{CD}^2 & =x^2+(y-3)^2+z^2 & =(\sqrt{7})^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=2\\ y=3\\ z=\sqrt{3}\end{array}\right.$$

よって, V の体積は $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot4=6$ より

$$\frac{1}{3}\cdot6\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}\cdots(\text{答})$$

2

$\mathrm{AD}_k = \dfrac{\alpha k}{n}$，$\mathrm{CD}_k = \alpha - \dfrac{\alpha k}{n} = \dfrac{\alpha(n-k)}{n}$ より，点 D_k は線分 AC を $k : n-k$ に内分する点であり，$\mathrm{AB} \perp \mathrm{BC}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ であるから，



$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}_k}\right|^2 = \left|\frac{(n-k)\overrightarrow{\mathrm{BA}} + k\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{k+(n-k)}\right|^2 = \frac{(n-k)^2\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|^2 + k^2\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2}{n^2}$$

(1) $L_k = \left|\overrightarrow{\mathrm{BD}_k}\right|$ であるから，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1}(L_k)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{(n-k)^2\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|^2 + k^2\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2\right\}$$
$$= \frac{1}{n^2}\left\{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|^2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right\}$$

であり，これと，

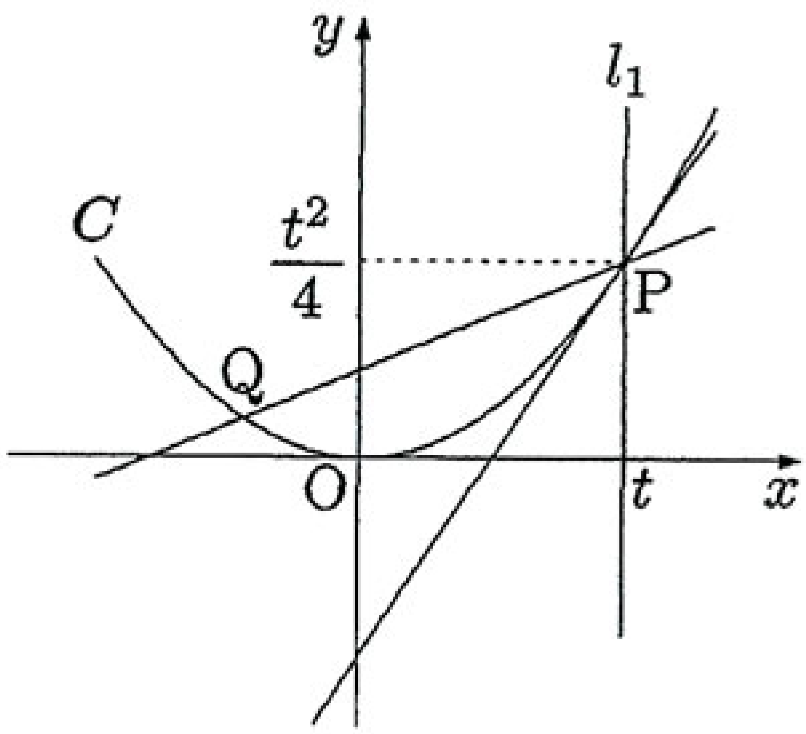
$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 = (n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2 = \sum_{k=1}^{n-1}k^2$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2 = \alpha^2$$

より，

$$S_n = \frac{1}{n^2}\left\{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2\right\}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{\alpha^2(n-1)(2n-1)}{6n}$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^2(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^2}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{\alpha^2}{3}$

3



(1) $y=\frac{1}{4}x^2$ のとき，$y'=\frac{x}{2}$ であるから，直線 l_2 の傾きは $\frac{t}{2}$ である．次に，l_1，l_2 の方向ベクトルをそれぞれ $\vec{u_1}$，$\vec{u_2}$ とおくと，$\vec{u_1}=(0,\ 1)$，$\vec{u_2}=(2,\ t)$ であるから，

$$\cos\theta=\frac{\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}}{\left|\vec{u_1}\right|\left|\vec{u_2}\right|}=\frac{t}{\sqrt{4+t^2}} \qquad \cdots①$$

(2) $t>0$ より①の θ は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であり，$\tan\theta=\frac{2}{t}$ である．このとき，l_3 の傾きは $\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$ で表され，

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\frac{1}{\tan 2\theta}=\frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}=\frac{1-\frac{4}{t^2}}{2\cdot\frac{2}{t}}=\frac{t^2-4}{4t}$$

であるから，直線 l_3 の式は，$y-\frac{t^2}{4}=\frac{t^2-4}{4t}(x-t)$

$$\therefore\ y=\frac{t^2-4}{4t}x+1 \qquad \cdots②$$

(3) ②より，l_3 は正の数 t によらない定点 $(0,\ 1)$ を通る．

(4) $C: y=\frac{1}{4}x^2$，$l_3: y=\frac{t^2-4}{4t}x+1$ より y を消去し x で整理すると，

$$tx^2-(t^2-4)x-4t=0$$

$$(tx+4)(x-t)=0 \qquad \therefore\ x=-\frac{4}{t},\ t$$

よって，$\mathrm{P}\left(t,\ \frac{t^2}{4}\right)$，$\mathrm{Q}\left(-\frac{4}{t},\ \frac{4}{t^2}\right)$ であるから，

$$\mathrm{PQ}^2=\left(t+\frac{4}{t}\right)^2+\left(\frac{t^2}{4}-\frac{4}{t^2}\right)^2=\left(t+\frac{4}{t}\right)^2+\left(\frac{t^2}{4}+\frac{4}{t^2}\right)^2-4$$

また，$t>0$ より，$t+\frac{4}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}=4$，$\frac{t^2}{4}+\frac{4}{t^2}\geqq 2\sqrt{\frac{t^2}{4}\cdot\frac{4}{t^2}}=2$ が成り立ち，等号はそれぞれ $t=\frac{4}{t}$，$\frac{t^2}{4}=\frac{4}{t^2}$，すなわち $t=2$ のとき成り立つ．

したがって，PQ の長さが最小になるような t の値は $t=2$ である．

4

(1) $OQ=AQ$ より、点QはOAの垂直二等分線上にある。

よって、$Q\left(\frac{a}{2}, t\right)$とおける。これと$OQ=PQ$より、

$$\frac{a^2}{4}+t^2=\left(\cos\theta-\frac{a}{2}\right)^2+(\sin\theta-t)^2 \qquad \therefore\ 2t\sin\theta=1-a\cos\theta$$

$0<\theta<\pi$ より $\sin\theta>0$ であるから、$t=\dfrac{1-a\cos\theta}{2\sin\theta}$ $\qquad \therefore\ Q\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{1-a\cos\theta}{2\sin\theta}\right)$ ——(答)

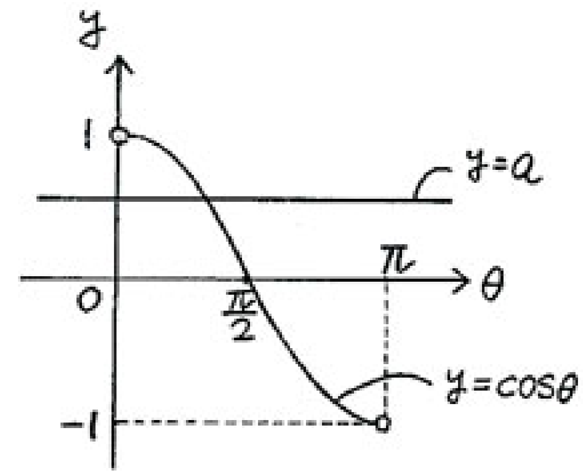
(2) $f(\theta)=\dfrac{1-a\cos\theta}{2\sin\theta}$ $(0<\theta<\pi)$ とおく。

$$f'(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sin\theta\cdot\sin\theta-(1-a\cos\theta)\cdot\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{a-\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

いま $0<a<1$ より、$\cos\theta=a$ $(0<\theta<\pi)$ をみたすθがただ1つ存在する。

それをαとおくと、$f(\theta)$の増減は下表のようになる。



θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	(π)
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		↘		↗	

よって $f(\theta)$は$\theta=\alpha$で最小になる。このとき、$\cos\alpha=a$、$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-a^2}$ であるから、求めるyの最小値は

$$f(\alpha)=\frac{1-a\cos\alpha}{2\sin\alpha}$$

$$=\frac{1-a^2}{2\sqrt{1-a^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-a^2}}{2}$$ ——(答)

5

(1) $a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \left[\tan x - x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \underline{1 - \frac{\pi}{4}}$ ——(答)

(2) $a_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \cdot \tan^2 x\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x\,dx$

$= \left[\frac{\tan^{2n+1} x}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - a_n$

$= \underline{\frac{1}{2n+1} - a_n}$ ——(答)

(3) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ において、$0 \leqq \tan x \leqq 1$ $\therefore 0 \leqq \tan^{2n+2} x \leqq \tan^{2n} x$

この各辺を $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ において積分すると、(各辺は恒等的に等しくはないから)

$0 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x\,dx$ $\therefore 0 < a_{n+1} < a_n$ $(n \geqq 1)$

よって $n \geqq 2$ のとき、$0 < 2a_n = a_n + a_n < a_n + a_{n-1} = \frac{1}{2n-1}$ $(\because (2))$

$\therefore 0 < a_n < \frac{1}{2(2n-1)}$ であり、$\frac{1}{2(2n-1)} \to 0$ $(n \to \infty)$ であるから、

はさみうちの原理より $\lim_{n \to \infty} a_n = \underline{0}$ ——(答)

(4) $k \geqq 2$ において、$\frac{1}{2k-1} = a_k + a_{k-1}$ $\therefore \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = (-1)^{k+1}(a_k + a_{k-1}) = (-1)^{k+1} a_k - (-1)^k a_{k-1}$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left\{(-1)^{k+1} a_k - (-1)^k a_{k-1}\right\}$

$= 1 + (-1)^{n+1} a_n - a_1$

$= \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} a_n$ $(\because (1))$

$\therefore \lim_{n \to \infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} - \frac{\pi}{4} \right| = \lim_{n \to \infty} \left|(-1)^{n+1} a_n\right| = \lim_{n \to \infty} a_n = 0$ $(\because (3))$

$\therefore \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} - \frac{\pi}{4} \right) = 0$ $\therefore \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \underline{\frac{\pi}{4}}$ ——(答)