2009年度　北海道大学　前期　数学(文系)

## 1

(1) $\gamma = 1 + \sqrt{3}i \Leftrightarrow \gamma - 1 = \sqrt{3}i$

両辺を平方して　$(\gamma - 1)^2 = -3 \Leftrightarrow \gamma^2 - 2\gamma + 4 = 0$

ここで $P(x)$ を $x^2 - 2x + 4$ で割ると

$$P(x) = (x^2 - 2x + 4)\{x^2 + (a+2)x + 2a + b\} + (2b - 8\sqrt{3} - 16)x + (16 - 8a - 4b) \cdots ①$$

① に $\gamma$ を代入すると

$$P(\gamma) = (2b - 8\sqrt{3} - 16)\gamma + (16 - 8a - 4b) \Leftrightarrow 0 = (2b - 8\sqrt{3} - 16)(1 + \sqrt{3}i) + (16 - 8a - 4b)$$

$$\Leftrightarrow (-8a - 2b - 8\sqrt{3}) + (2b - 8\sqrt{3} - 16)\sqrt{3}i = 0$$

$a, b$ は実数であるから

$$-8a - 2b - 8\sqrt{3} = 0 \text{ かつ } 2b - 8\sqrt{3} - 16 = 0 \Leftrightarrow a = -2\sqrt{3} - 2\ ,\ b = 8 + 4\sqrt{3} \cdots (\text{答})$$

(2) (1) で求めた $a, b$ の値を ① に代入すると $P(x) = (x^2 - 2x + 4)(x^2 - 2\sqrt{3}x + 4)$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = 0$ または $x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}i$ または $x = \sqrt{3} \pm i$

よって，$\gamma$ 以外の解は $x = 1 - \sqrt{3}i\ ,\sqrt{3} + i\ ,\ \sqrt{3} - i \cdots$(答)

## 2

(1) 直線 OP の方程式は $y=(3n-6)x$ と表せる.
直線 $x=k$ と 直線 OP, 放物線 $C$ との交点の $y$ 座標は
それぞれ $(3n-6)k,\ 3k^2-6k$ であり
$0 \leqq k \leqq n$ のとき, $(3n-6)k-(3k^2-6k)=3k(n-k) \geqq 0$ であることから
$f(k)=(3n-6)k-(3k^2-6k)+1=-3k^2+3nk+1 \cdots$(答)

(2) (1) より, 格子点の総数を $S$ とおくと

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{n}(-3k^2+3nk+1) \\ &= -3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n^2-n+2) \cdots \text{(答)} \end{aligned}$$

(3) $0 \leqq k \leqq n-1$ のとき
$f(k+1)-f(k)=\left\{-3(k+1)^2+3n(k+1)+1\right\}-(-3k^2+3nk+1)=3n-3-6k$ より
$f(k+1) \geqq f(k)$ となるのは, $3n-3-6k \geqq 0 \Leftrightarrow \dfrac{n-1}{2} \geqq k \cdots$① のときである.
等号が成立する $n, k$ の条件に注意すると

i) $n$ が奇数のとき, $n=2m+1$ ($m$ は 0 以上の整数) とおくと, ① $\Leftrightarrow m \geqq k$ より

$$\begin{gathered} k=0,1,2,\cdots,m-1 \text{のとき } f(0)<f(1)<f(2)<\cdots<f(m-1)<f(m) \\ k=m \text{のとき } f(m)=f(m+1) \\ k=m+1,m+2,\cdots,2m+1 \text{のとき } f(m+1)>f(m+2)>\cdots>f(2m+1) \end{gathered}$$

となるから, $k=m, m+1$ すなわち $k=\dfrac{n-1}{2}$, $\dfrac{n+1}{2}$ で $f(k)$ は最大となる. $\cdots$(答)

ii) $n$ が偶数のとき, $n=2m$ ($m$ は 1 以上の整数) とおくと, ① $\Leftrightarrow m-\dfrac{1}{2} \geqq k$ より

$$\begin{gathered} k=0,1,2,\cdots,m-1 \text{のとき } f(0)<f(1)<f(2)<\cdots<f(m-1)<f(m) \\ k=m,m+1,m+2,\cdots,2m \text{のとき } f(m)>f(m+1)>f(m+2)>\cdots>f(2m) \end{gathered}$$

となるから, $k=m$ すなわち $k=\dfrac{n}{2}$ で $f(k)$ は最大となる. $\cdots$(答)

$\boxed{3}$

(1) 「P,Q,R が一直線上にある」 $\Leftrightarrow$「$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ が平行」

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(t,\ 1-4t^2)$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(-2t,\ 1-t^2)$ より

$t\cdot(1-t^2)-(-2t)\cdot(1-4t^2)=0 \Leftrightarrow -9t^3+3t=0 \Leftrightarrow t=0,\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$t>0$ であるから, $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdots$(答)

(2) (1) より $\triangle$PQR の面積を $S(t)$ とおくと

$$S(t)=\frac{1}{2}\left|-9t^3+3t\right|=\frac{1}{2}(-9t^3+3t)$$

$$\left(\because\ 0<t<\frac{1}{\sqrt{3}}\text{のとき，}\ -9t^3+3t=3t(1-3t^2)>0\right)$$

$$\begin{aligned}S'(t)&=\frac{1}{2}(-27t^2+3)\\&=-\frac{27}{2}\left(t+\frac{1}{3}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

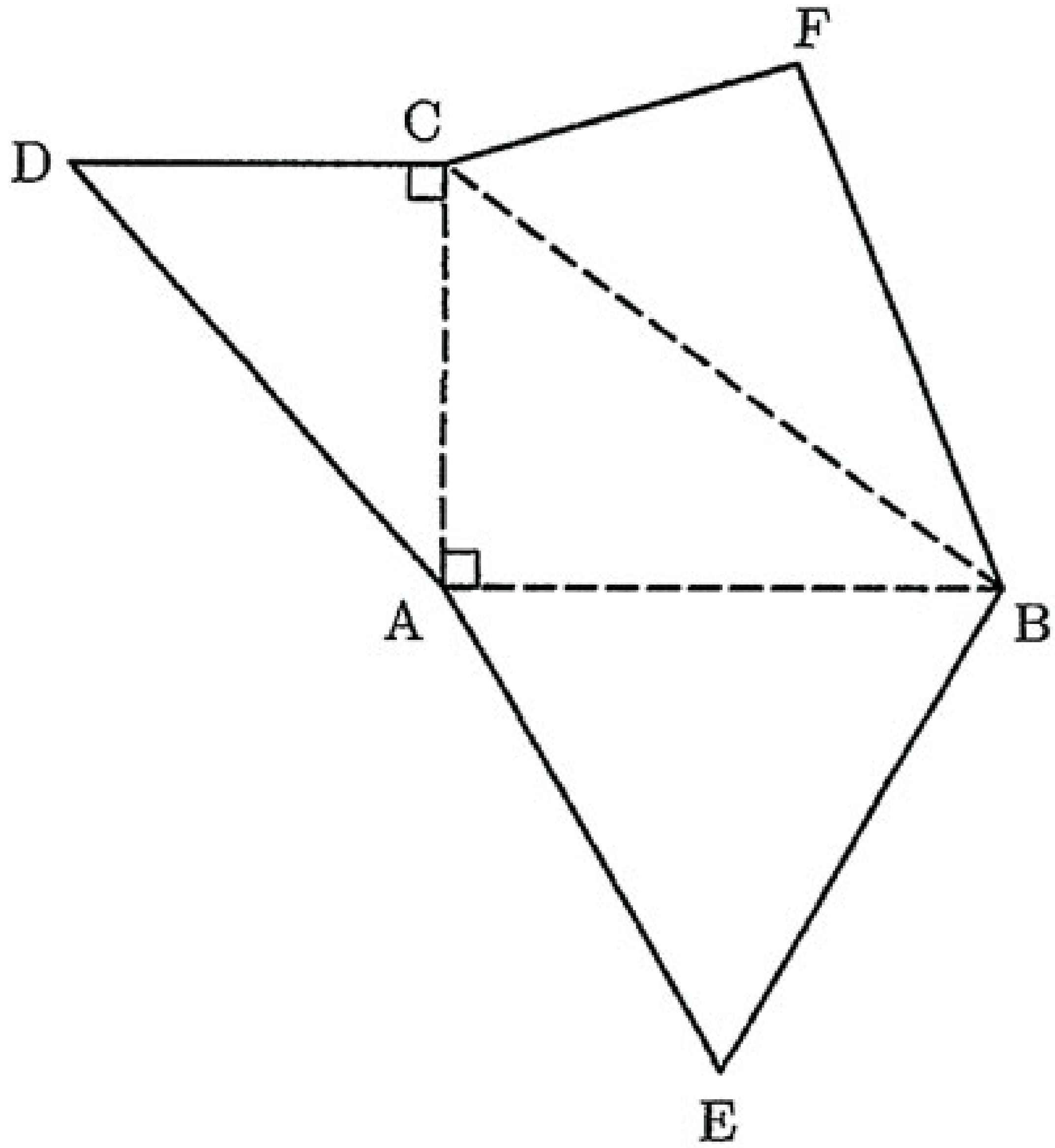
よって，増減表は下のようになる.

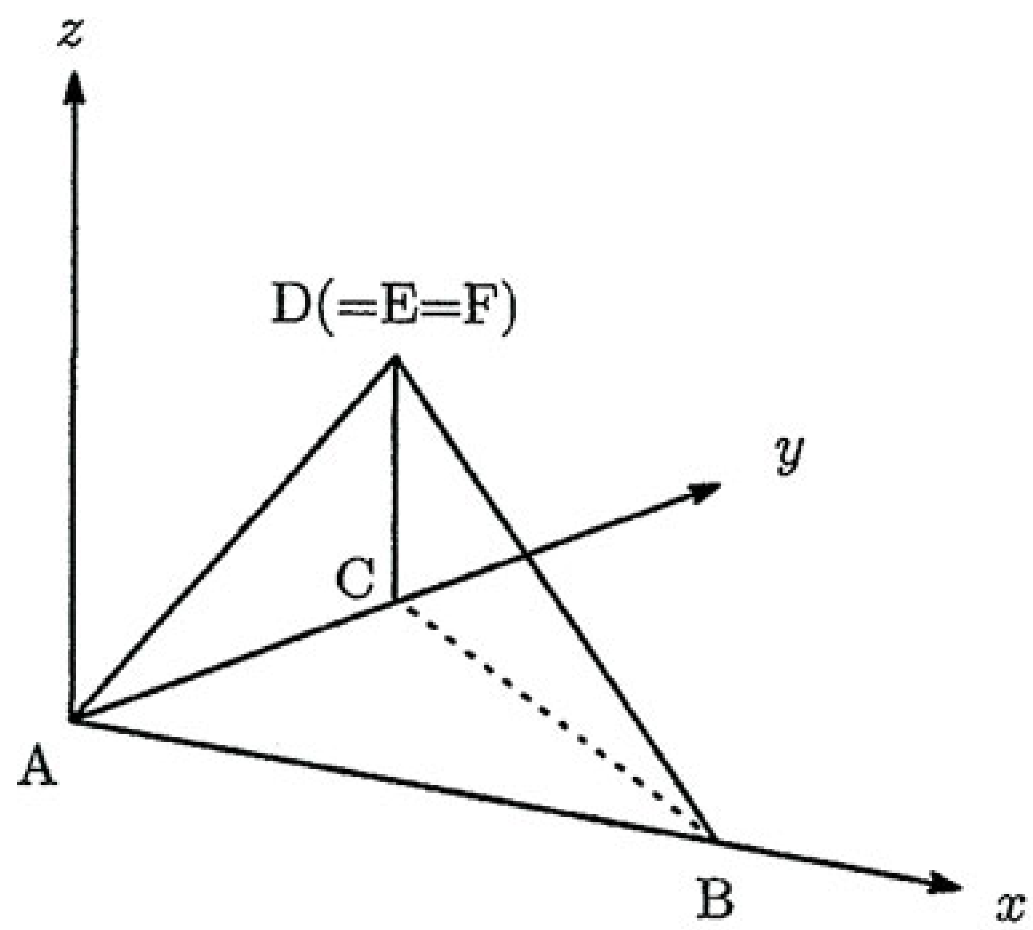
| $t$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\frac{1}{3}$ | $\cdots$ | $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $S(t)$ | | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ | |

ゆえに，$t=\dfrac{1}{3}$ のとき, $S(t)$ すなわち $\triangle$PQR は最大となり,

最大値は $S(\frac{1}{3})=\dfrac{1}{3}$ となる.　$\cdots$(答)

## 4




三角錐 $V$ を作ると 3 点 D,E,F は一点に集まることから

$\mathrm{AE}=\mathrm{AD}=\mathrm{BE}=\mathrm{BF}=4$ , $\mathrm{CD}=\mathrm{CF}$

$\triangle\mathrm{ACD}$ は直角三角形なので, $\mathrm{CD}=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{AC}^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}^2$ より, $\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$

よって, $\triangle$ ABC を底面とするとき, 高さを求めるために

$\mathrm{A}(0,0,0)$, $\mathrm{B}(4,0,0)$, $\mathrm{C}(0,3,0)$, $\mathrm{D}(x,y,z)$ $(z>0)$ とおくと

$$\begin{cases} \mathrm{AD}^2 &= x^2+y^2+z^2 &= 4^2 \\ \mathrm{BD}^2 &= (x-4)^2+y^2+z^2 &= 4^2 \\ \mathrm{CD}^2 &= x^2+(y-3)^2+z^2 &= (\sqrt{7})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=\sqrt{3} \end{cases}$$

よって, $V$ の体積は $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$ より

$$\frac{1}{3}\cdot 6\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}\cdots(\text{答})$$