1

$$m^3+1^3=n^3+10^3 \iff (m-n)(m^2+mn+n^2)=3^3\cdot 37 \qquad \cdots ①$$

m, n は 2 以上の整数であるから，$m-n \geqq 9$ とすると，$m \geqq n+9 \geqq 11$ より，

$$m^2+mn+n^2 \geqq 11^2+11\cdot 2+2^2=147$$

$$(①の左辺) \geqq 9\cdot 147=1323$$

となり，不適．したがって，$0<m-n<9$ となるから，$m-n=1,3$ の場合を考えればよい．

(i)　$m-n=1$ のとき

①より，

$$m^2+mn+n^2=999$$

$m=n+1$ を代入して，

$$(n+1)^2+(n+1)n+n^2=999 \iff 3(n^2+n)+1=999$$

左辺は 3 で割ると余りが 1 となるが，これは，右辺が 3 の倍数であることに矛盾するから，これを満たす整数 n は存在しない．

(ii)　$m-n=3$ のとき

①より，

$$m^2+mn+n^2=333$$

$m=n+3$ を代入して，

$$(n+3)^2+(n+3)n+n^2=333 \iff n^2+3n-108=0$$

$$\iff (n-9)(n+12)=0$$

n は 2 以上の整数であるから，$n=9$．したがって，$(m,n)=(12,9)$

以上から，$(m,n)=(12,9)$　　…(答)

$\boxed{2}$

(1)　$x\cos\theta+y\sin\theta=\sqrt{x^2+y^2}\cos(\theta-\alpha)$ であるから，

$$-\sqrt{x^2+y^2}\leqq x\cos\theta+y\sin\theta\leqq\sqrt{x^2+y^2}$$

となる．よって，任意の角 θ に対して $-2\leqq x\cos\theta+y\sin\theta\leqq y+1$ が成立するのは，

$$-2\leqq-\sqrt{x^2+y^2}\quad \text{かつ} \quad \sqrt{x^2+y^2}\leqq y+1$$

が成り立つときである．

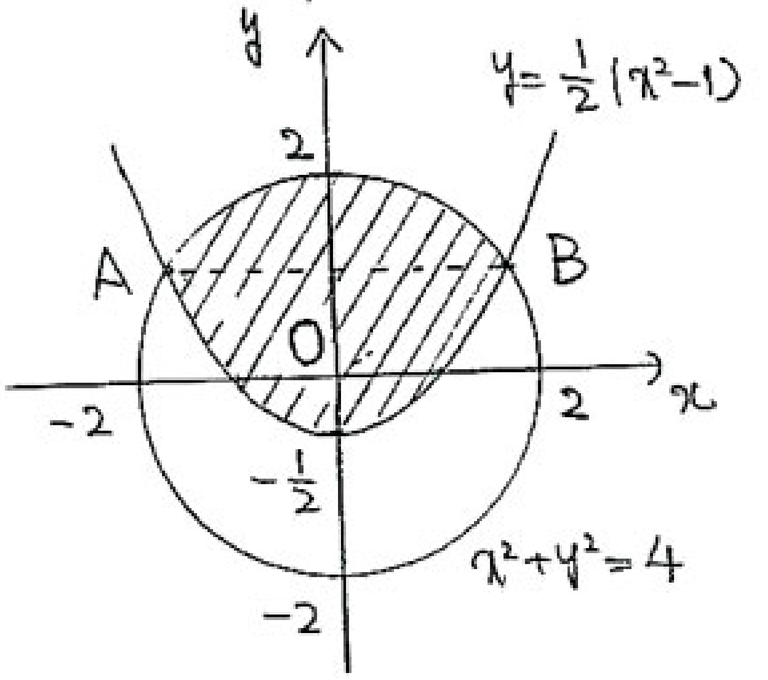
$$-2\leqq-\sqrt{x^2+y^2}\iff x^2+y^2\leqq 4\quad\cdots①$$

$$\sqrt{x^2+y^2}\leqq y+1\iff y\geqq\frac{1}{2}(x^2-1)\text{かつ}y+1\geqq 0\quad\cdots②$$

求める領域は，①かつ②で図の斜線部となる．ただし，境界を含む．
また，図のように円と放物線との

交点を $A(-\sqrt{3},1)$，$B(\sqrt{3},1)$ とすると，

$\angle AOB=\frac{2}{3}\pi$ となることから，面積は，



$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left\{1-\frac{1}{2}(x^2-1)\right\}dx+\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\sin\frac{2}{3}\pi$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot(2\sqrt{3})^3+\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}=\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi\cdots(\text{答})$$

(2)　$-x^2\leqq x^2\cos\alpha\leqq x^2$，$-|y|\leqq y\sin\beta\leqq|y|$ であるから，

$$-x^2-|y|\leqq x^2\cos\alpha+y\sin\beta\leqq x^2+|y|$$

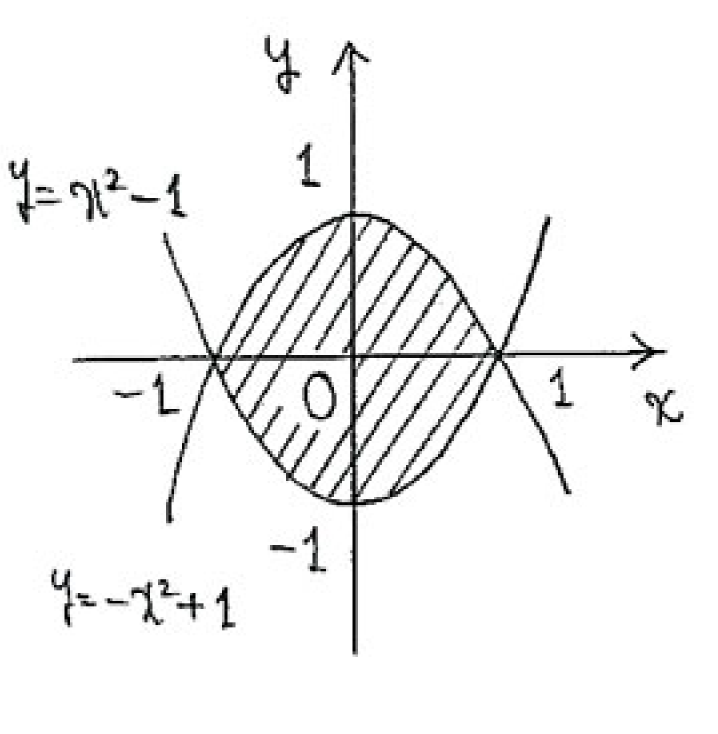
となる．

したがって，任意の角 α，β に対して，$-1\leqq x^2\cos\alpha+y\sin\beta\leqq 1$ が成り立つのは，

$$-1\leqq-x^2-|y|\text{かつ}x^2+|y|\leqq 1\qquad\therefore\quad |y|\leqq-x^2+1$$

のときであり，求める領域は，図の斜線部となる．ただし，境界を含む．
また，面積は，

$$2\int_{-1}^{1}\left\{-(x^2-1)\right\}dx=2\cdot\frac{1}{6}\cdot2^3=\frac{8}{3}\cdots(\text{答})$$



3

$x^2-2px+q=(x-p)^2-p^2+q$ であるから，$r=-p^2+q$ ……① とおくと，放物線の方程式は $y=(x-p)^2+r$ ……② となり，その頂点は (p,r) となる．

まず，

中心 $\mathrm{A}(p,a)$ で半径1の円 C_a が②と共有点をもつ条件 ……③

を求める．

②上の点を $\mathrm{P}(x,y)$ とおくと，

$$\mathrm{AP}^2=(x-p)^2+(y-a)^2=y-r+(y-a)^2$$
$$=\left\{y-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right\}^2+a-\frac{1}{4}-r\ (=f(y)\text{とおく})$$

であり，③は，$y\geqq r$ における $f(y)$ の最小値 m が1以下であることである．

(i) $r\leqq a-\dfrac{1}{2}$ ……④ のとき

$m=f\left(a-\dfrac{1}{2}\right)=a-\dfrac{1}{4}-r$ であるから，$m\leqq 1$ より，$a-\dfrac{5}{4}\leqq r$

④を考慮して，　$a-\dfrac{5}{4}\leqq r\leqq a-\dfrac{1}{2}$ ……⑤

(ii) $a-\dfrac{1}{2}<r$ ……⑥ のとき

$m=f(r)=(r-a)^2$ であるから，$m\leqq 1$ より，$a-1\leqq r\leqq a+1$

⑥を考慮して，　$a-\dfrac{1}{2}<r\leqq a+1$ ……⑦

よって，③は，⑤または⑦より，

$$a-\frac{5}{4}\leqq r\leqq a+1 \quad\text{……⑧}$$

となる．

⑧で $a=2q$ とおいて，円 C_{2q} が②と共有点をもつ条件は，①も考慮して，

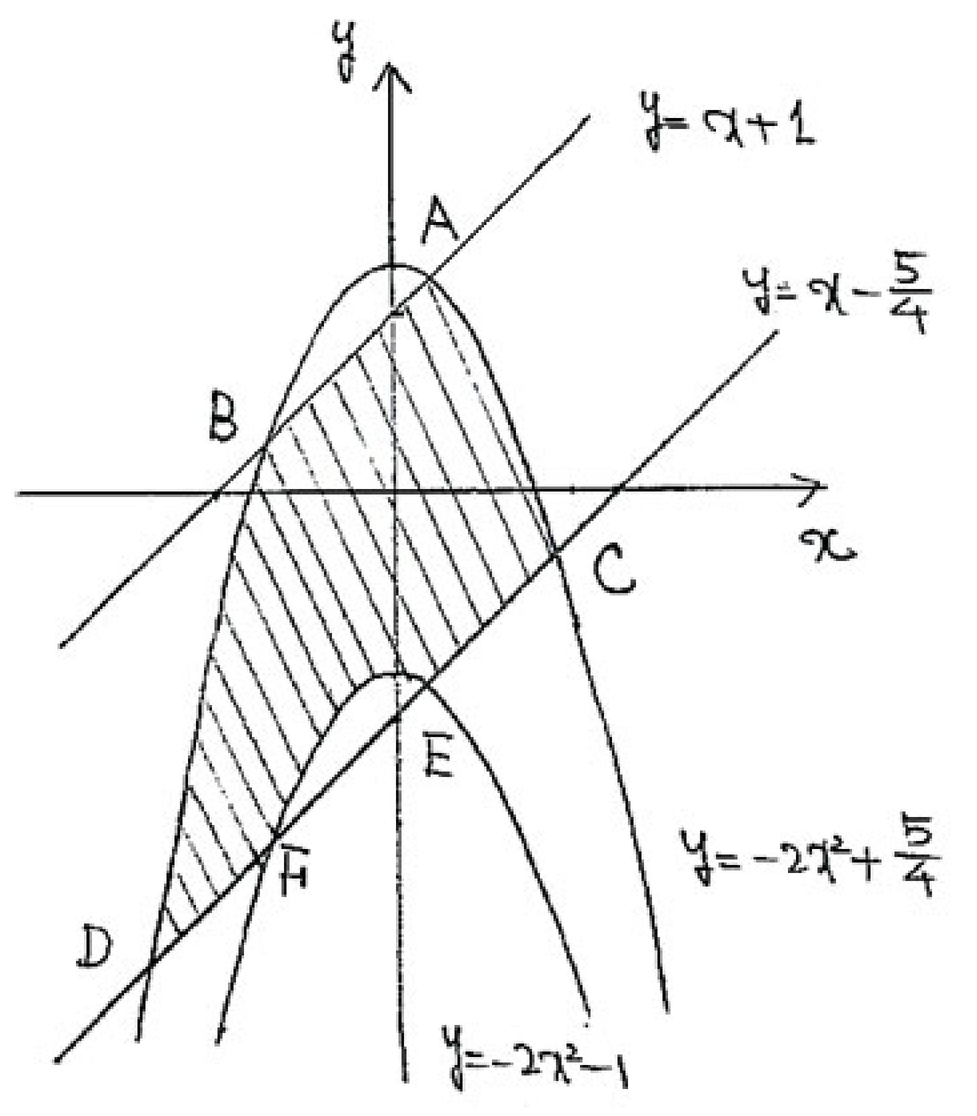
$$2(p^2+r)-\frac{5}{4}\leqq r\leqq 2(p^2+r)+1 \qquad \therefore\ -2p^2-1\leqq r\leqq -2p^2+\frac{5}{4} \quad\text{……⑨}$$

⑧で $a=p$ とおいて，円 C_p が②と共有点をもつ条件は，$p-\dfrac{5}{4}\leqq r\leqq p+1$ ……⑩

⑨，⑩より，放物線の頂点 (p,r) の存在しうる領域は，

$$-2x^2-1\leqq y\leqq -2x^2+\frac{5}{4}\ \text{かつ}\ x-\frac{5}{4}\leqq y\leqq x+1$$

であり，図示すると，下図の斜線部分となる．ただし，境界を含む．



$\mathrm{A}\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{4},\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}\right)$

$\mathrm{B}\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{4},\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}\right)$

$\mathrm{C}\left(\dfrac{-1+\sqrt{21}}{4},\dfrac{-6+\sqrt{21}}{4}\right)$

$\mathrm{D}\left(\dfrac{-1-\sqrt{21}}{4},\dfrac{-6-\sqrt{21}}{4}\right)$

$\mathrm{E}\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{4},\dfrac{-6+\sqrt{3}}{4}\right)$

$\mathrm{F}\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{4},\dfrac{-6-\sqrt{3}}{4}\right)$

$\boxed{4}$

(1)　$O(0,0), B'(2,0), C'(1,\sqrt{3})$ となるように座標軸を設定すると点 P，Q は図の位置になる．

$$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OB'}+2\overrightarrow{OC'}=(6,2\sqrt{3})\parallel(\sqrt{3},1)$$

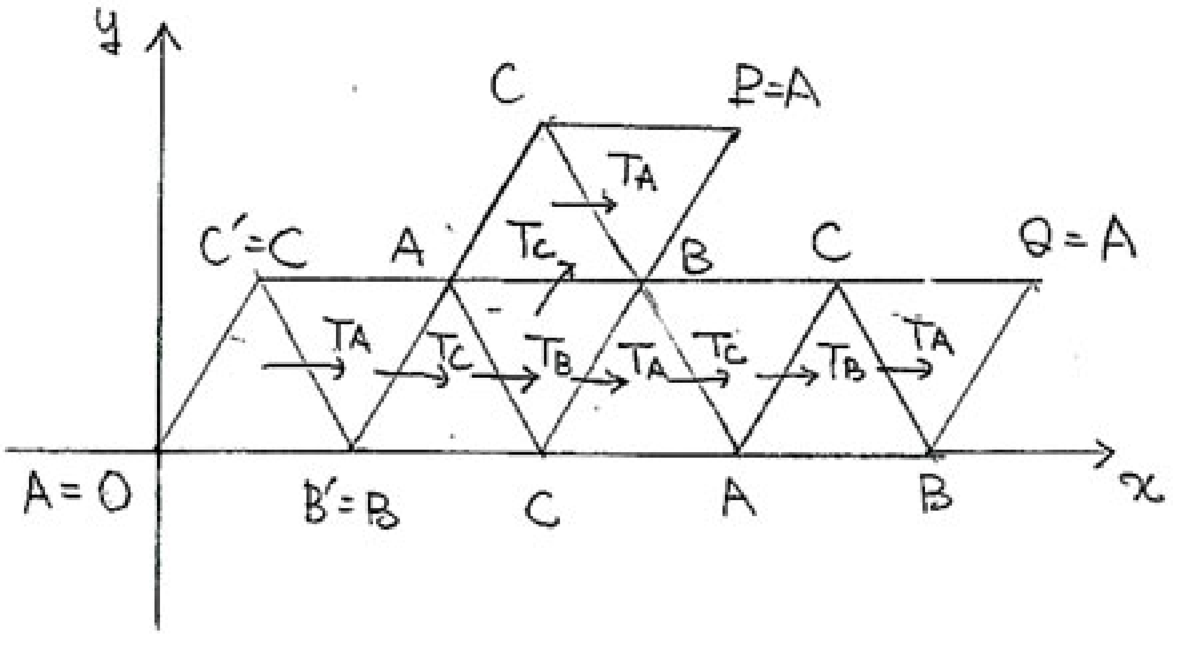
$$\overrightarrow{OQ}=4\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}=(9,\sqrt{3})\parallel(3\sqrt{3},1)$$

であるから，

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{3},1)\cdot(3\sqrt{3},1)}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\sqrt{(3\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{5}{14}\sqrt{7}$$

…(答)

となる．



(2)　操作Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳを次のように定める．

操作Ⅰ「$T_A, T_C, T_B, T_A, T_C, T_B$ の順に折り返す」

操作Ⅱ「$T_A, T_B, T_C, T_A, T_B, T_C$ の順に折り返す」

操作Ⅲ「$T_B, T_C, T_A, T_B, T_C, T_A$ の順に折り返す」

操作Ⅳ「$T_C, T_B, T_A, T_C, T_B, T_A$ の順に折り返す」

操作Ⅰにより，△OB′C′（△ABC）は図のように△$A_1B_1C_1$ に平行移動され，A は A_1 に移る．このとき，$3\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA_1}$ である．

同様に操作Ⅱにより，△OB′C′（△ABC）は図のように△$A_2B_2C_2$ に平行移動され，A は A_2 に移る．このとき，$3\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OA_2}$ である．

操作Ⅲ，Ⅳはそれぞれ操作Ⅰ，Ⅱを逆に行うものである．

したがって，

$$\overrightarrow{OR}=3k\overrightarrow{OB'}+3l\overrightarrow{OC'}=k(3\overrightarrow{OB'})+l(3\overrightarrow{OC'})$$

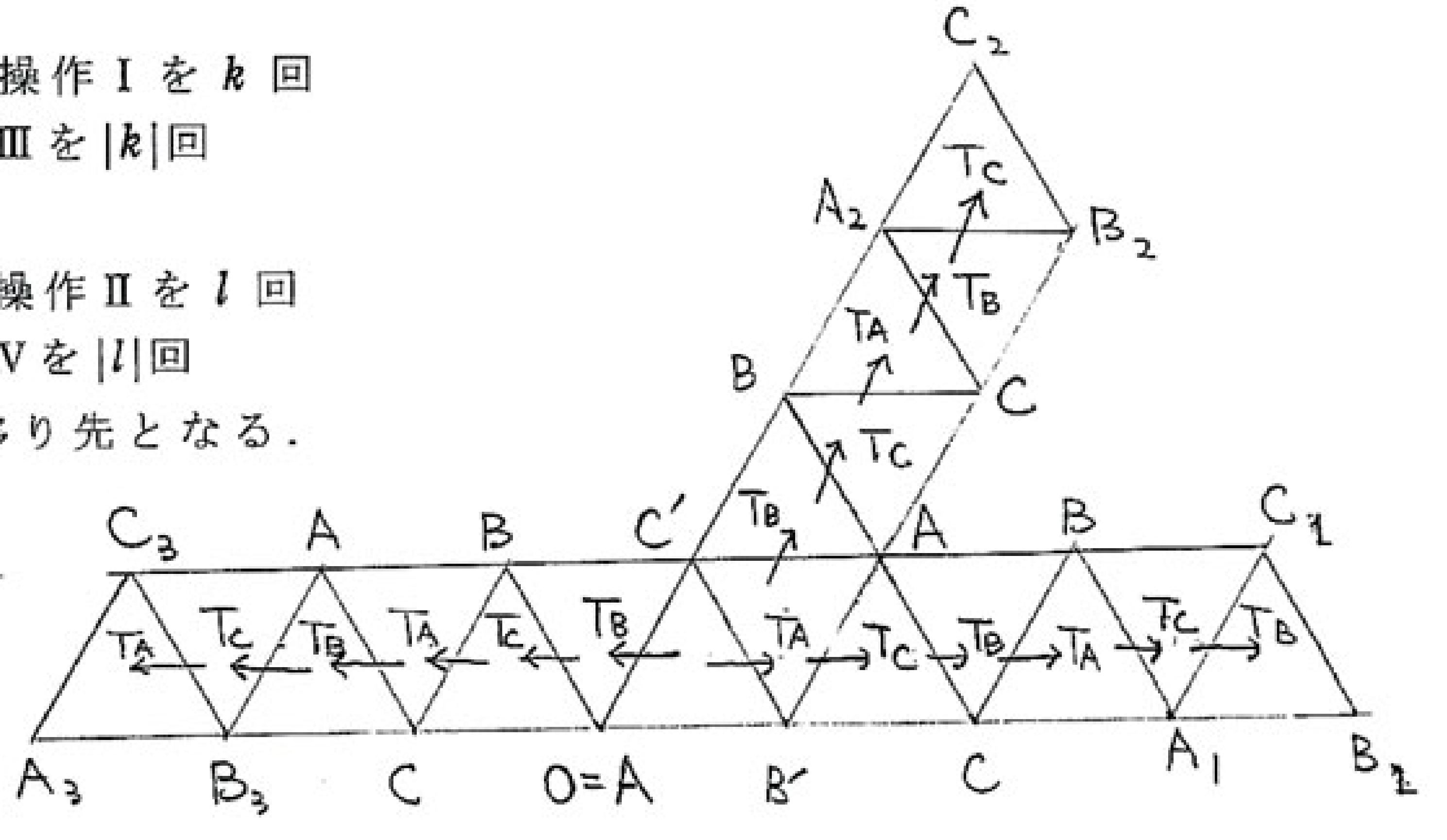
により定められる点 R は，

k が 0 以上のときは操作Ⅰを k 回
k が負のときは操作Ⅲを $|k|$ 回

さらに

l が 0 以上のときは操作Ⅱを l 回
l が負のときは操作Ⅳを $|l|$ 回

行うことにより，点 A の移り先となる．



$\boxed{5}$

(1)(i)　n 回の試行で X が x 回，Y が y 回選ばれたとすると，

$$x+y=n,\quad 0\leqq x\leqq n,\quad 0\leqq y\leqq n$$

であるから，点 P が到達可能な点は，$(0,n),(1,n-1),(2,n-2),\cdots,(n,0)$ の $n+1$ 個となる．…(答)

(ii)　$x=l$ として，点 P が $(l,n-l)$ $(l=0,1,2,\cdots,n)$ に到達する確率 p_l は，

$$p_l={}_n\mathrm{C}_l\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となる．

$$\frac{p_{l+1}}{p_l}\geqq 1\iff\frac{{}_n\mathrm{C}_{l+1}}{{}_n\mathrm{C}_l}=\frac{n-l}{l+1}\geqq 1\iff l\leqq\frac{n-1}{2}$$

であるから，

(ア)　n が奇数の場合

$$l\leqq\frac{n-3}{2}\text{ のとき } p_{l+1}>p_l,\ l=\frac{n-1}{2}\text{ のとき } p_{l+1}=p_l,\ l\geqq\frac{n+1}{2}\text{ のとき } p_{l+1}<p_l$$

よって，$l=\dfrac{n-1}{2},\dfrac{n+1}{2}$ で p_l は最大となる．

(イ)　n が偶数の場合

$$l\leqq\frac{n-2}{2}\text{ のとき } p_{l+1}>p_l,\ l\geqq\frac{n}{2}\text{ のとき } p_{l+1}<p_l$$

よって，$l=\dfrac{n}{2}$ で p_l は最大となる．

以上から，確率が最大となる点は，

$$\begin{cases} n\text{ が奇数のとき，}\left(\dfrac{n-1}{2},\dfrac{n+1}{2}\right),\left(\dfrac{n+1}{2},\dfrac{n-1}{2}\right) \\ n\text{ が偶数のとき，}\left(\dfrac{n}{2},\dfrac{n}{2}\right) \end{cases}$$

…(答)

(2)(i) n 回の試行で X，Y，Z がそれぞれ x 回，y 回，z 回選ばれたとする．

$z=k\,(k=0,1,\cdots,n)$ のとき，

$$x+y=n-k$$

となり，点 P が到達可能な点の個数は，$n-k+1$ 個である．

よって，求める個数は，

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\text{ 個}$$

…(答)

となる．

(ii)　$z=k\,(k=0,1,\cdots,n)$ のとき，P が到達する確率が最大の点は(1)より，

$$\begin{cases} n-k\text{が奇数のとき},\left(\dfrac{n-k-1}{2},\dfrac{n-k+1}{2}\right)\text{または}\left(\dfrac{n-k+1}{2},\dfrac{n-k-1}{2}\right) \\ n-k\text{が偶数のとき},\left(\dfrac{n-k}{2},\dfrac{n-k}{2}\right) \end{cases} \quad \cdots(*)$$

である．この点に到達する確率 p_k は，

$$p_k=\begin{cases} {}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_{n-k}\mathrm{C}_{\frac{n-k-1}{2}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n & (n-k\text{が奇数のとき}) \\ {}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_{n-k}\mathrm{C}_{\frac{n-k}{2}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n & (n-k\text{が偶数のとき}) \end{cases}$$

となるから，$k=0,1,\cdots,n$ で動かしたとき p_k が最大となる k を求める．

（ア）　$n-k$ が奇数（$n-(k+1)$ が偶数）の場合

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}\geqq 1 \iff \frac{{}_n\mathrm{C}_{k+1}\cdot{}_{n-(k+1)}\mathrm{C}_{\frac{n-(k+1)}{2}}}{{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_{n-k}\mathrm{C}_{\frac{n-k-1}{2}}}=\frac{n-k+1}{2(k+1)}\geqq 1 \iff k\leqq\frac{n-1}{3}$$

である．n が 3 の倍数であることから，

$$\begin{cases} k\leqq\dfrac{n-3}{3}\text{のとき}\,p_{k+1}>p_k \\ k\geqq\dfrac{n}{3}\text{のとき}\,p_{k+1}<p_k \end{cases}$$

となり，$k=\dfrac{n}{3}$ で p_k は最大となる．

（イ）　$n-k$ が偶数（$n-(k+1)$ が奇数）の場合

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}\geqq 1 \iff \frac{{}_n\mathrm{C}_{k+1}\cdot{}_{n-(k+1)}\mathrm{C}_{\frac{n-(k+1)-1}{2}}}{{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_{n-k}\mathrm{C}_{\frac{n-k}{2}}}=\frac{n-k}{2(k+1)}\geqq 1 \iff k\leqq\frac{n-2}{3}$$

である．n が 3 の倍数であることから，

$$\begin{cases} k\leqq\dfrac{n-3}{3}\text{のとき}\,p_{k+1}>p_k \\ k\geqq\dfrac{n}{3}\text{のとき}\,p_{k+1}<p_k \end{cases}$$

となり，$k=\dfrac{n}{3}$ で p_k は最大となる．

以上から，確率が最大となるのは $k=\dfrac{n}{3}$ のときで，このとき，$n-k=\dfrac{2n}{3}$ は偶数となるから，$(*)$より，

$$\mathrm{P}\left(\frac{n}{3},\frac{n}{3}\right) \qquad \cdots(\text{答})$$

となる．