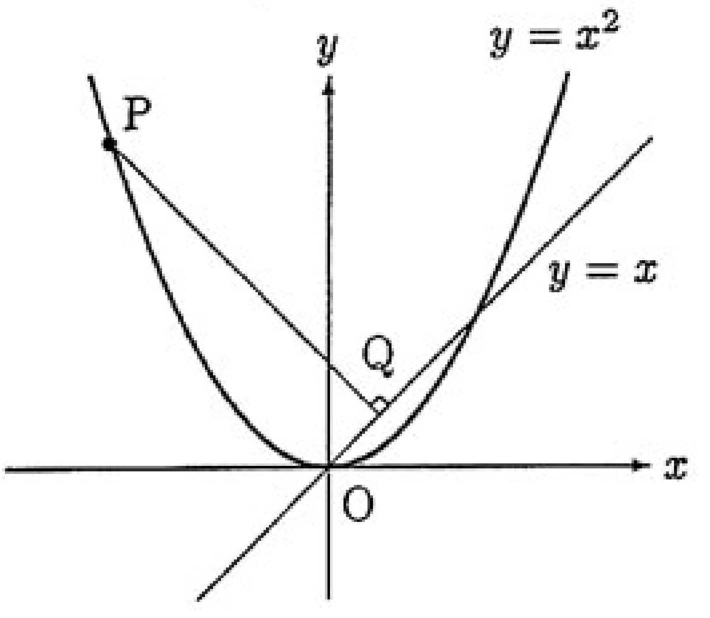
$\boxed{1}$

$$\begin{cases} y = x^2 & \cdots\cdots ① \\ y = x & \cdots\cdots ② \end{cases}$$



(1) ①, ② 上の点をそれぞれ $\mathrm{P}(t,\ t^2)$, $\mathrm{R}(k,\ k)$ とすると

$$\begin{aligned} \mathrm{PR}^2 &= (t-k)^2 + (t^2-k)^2 \\ &= 2k^2 - 2(t+t^2)k + t^2 + t^4 \\ &= 2\left(k - \frac{t+t^2}{2}\right)^2 + \frac{t^2(t-1)^2}{2} \end{aligned}$$

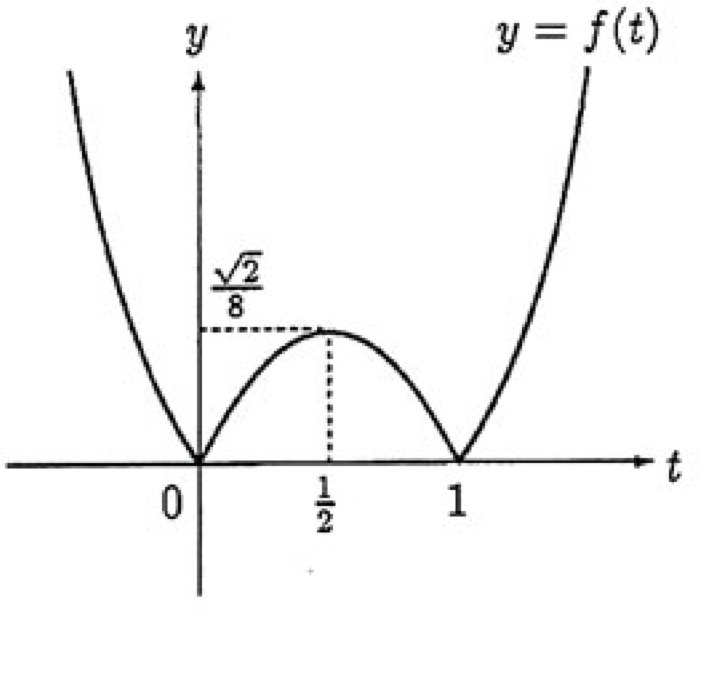
は $k = \dfrac{t+t^2}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{t^2(t-1)^2}{2}$ をとる．よって ② 上の点で P に最も近い点 Q は

$\mathrm{Q}\left(\dfrac{t+t^2}{2},\ \dfrac{t+t^2}{2}\right)$ であり，このときの 2 点間の距離は $\mathrm{PQ} = \sqrt{\dfrac{t^2(t-1)^2}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left|t(t-1)\right|$.

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left|t(t-1)\right|$ ……（答）

(2)
$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left|t(t-1)\right| \\ &= \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}t(t-1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{8} & (t<0,\ 1<t) \\ \dfrac{-\sqrt{2}}{2}t(t-1) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{8} & (0 \leqq t \leqq 1) \end{cases} \end{aligned}$$

よってグラフは右図となる．



(3) (i) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$0 \leqq f(t) \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{8}$ であるから $f(t) = \sqrt{2}$ を

みたす t は存在しない．

(ii) $t<0,\ 1<t$ のとき

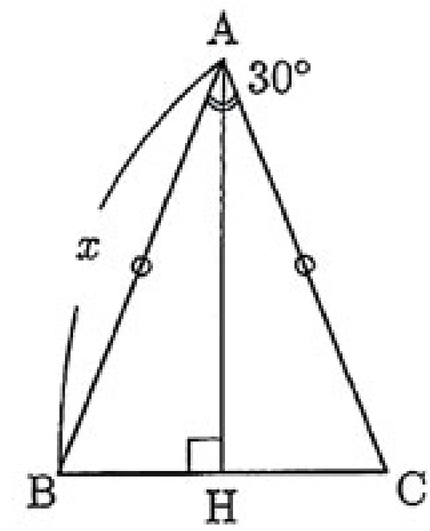
$$\begin{aligned} f(t) = \sqrt{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}t(t-1) = \sqrt{2} \\ &\Longleftrightarrow \quad (t+1)(t-2) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad t = -1,\ 2 \end{aligned}$$

これらは $t<0,\ 1<t$ に適する．

$\therefore\ t = -1,\ 2$ ……（答）

$\boxed{2}$ (1) $AB=x$ とすると $\triangle ABC$ に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A \\ &= (2-\sqrt{3})x^2 \end{aligned}$$



三平方の定理より

$$4AH^2 = 4(AB^2-BH^2) = 4x^2 - BC^2$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{AH^2}{BC^2} &= \frac{4x^2-BC^2}{4BC^2} \\ &= \frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{7+2\sqrt{12}}{4} \quad = \frac{(\sqrt{4}+\sqrt{3})^2}{4} \qquad \therefore\ \frac{AH}{BC} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$ ……(答)

(2)
$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{A}{2}\right)\cos B &= \frac{BH}{x}\times\frac{BH}{x} = \frac{BH^2}{x^2} \\ &= \frac{BC^2}{4x^2} \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$ ……(答)

【別解】 (1) $B=C=\dfrac{180^\circ-A}{2}=75^\circ$ だから

$$\begin{aligned} \frac{AH}{BC} &= \frac{AH}{2BH} \\ &= \frac{1}{2}\tan B \\ &= \frac{1}{2}\tan 75^\circ \\ &= \frac{1}{2}\tan(45^\circ+30^\circ) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \quad = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$ ……(答)

(2)
$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{A}{2}\right)\cos B &= \sin 15^\circ\cos 75^\circ \\ &= \sin(90^\circ-75^\circ)\times\cos 75^\circ \\ &= \cos^2 75^\circ \\ &= \frac{1+\cos 150^\circ}{2} \quad = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$ ……(答)

$\boxed{3}$

$a.b.c.d$：自然数で

$$\begin{cases} c=4a+7b \\ d=3a+4b \end{cases} \iff \begin{cases} 5a=-4c+7d \cdots\cdots ① \\ 5b=3c-4d \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たしている．

(1)

$$① \times 2 + ② : 5(2a+b) = -5c+10d$$

$$2a+b=-c+2d=-(c+3d)+5d$$

これより $c+3d$ が 5 の倍数より，$2a+b$ も 5 の倍数となる．

(2) c と d がどちらも素数 p の倍数より $c=pc'$，$d=pd'$ $(c',d'$：自然数$)$ とおける．

これらを ①,② に代入して

$$\begin{cases} 5a=p(-4c'+7d') \cdots\cdots ①' \\ 5b=p(3c'-4d') \cdots\cdots ②' \end{cases}$$

いま "$p \neq 5$" とすると p と 5 は互いに素であるから ①'，②' から

a,b は p で割り切れる，すなわち a と b は p を共通素因数にもつ

これは "a と b が互いに素である" ことに反する．よって $p=5$

$\boxed{4}$

1 から 9 のカードの 9 枚の中から 4 枚を取り出すとき, その取り出し方は,

$${}_9C_4 = 126 \text{ 通り}$$

であり, これらは同様に確からしい.

(1) X が 5 の倍数となるとき, 取り出された 4 枚の中に 5 のカードが含まれていればよく, そのような取り出し方は, 5 以外の 8 枚のカードから 3 枚を取り出したときの取り出し方と一致するので,

$${}_8C_3 = 56 \text{ 通り}$$

である. よって, X が 5 の倍数となる確率は,

$$\frac{56}{126} = \frac{4}{9}$$

である.

(2) X が 10 の倍数となる取り出し方は, 5 のカードと偶数のカードが取り出された 4 枚の中にあればよく, これは, X が 5 の倍数となる取り出し方のうちから, 「5 と 3 枚の奇数のカードが取り出される」というものを除いたものである.

5 と 3 枚の奇数のカードが取り出される取り出し方は, 5 以外の 1, 3, 7, 9 の 4 枚の奇数のカードから 3 枚を取り出す取り出し方と一致するので,

$${}_4C_3 = 4 \text{ 通り}$$

である. これより, X が 10 の倍数となる確率は, (1) も考慮して,

$$\frac{56-4}{126} = \frac{26}{63}$$

である.

(3) X が奇数となる取り出し方は, 1, 3, 5, 7, 9 の 5 枚の奇数のカードから 4 枚を取り出す取り出し方であるので,

$${}_5C_4 = 5 \text{ 通り}$$

である. 「X が奇数となる」の余事象が「X が偶数となる」であるので, X が偶数となる確率は,

$$1 - \frac{5}{126} = \frac{121}{126}$$

である.

X が 6 の倍数となるためには, X が偶数である必要があり, また, X が偶数となる取り出し方のうち X が 6 の倍数とならない取り出し方は,

「2, 4, 8 $\cdots$ ①のカードから少なくとも 1 枚」かつ「1, 5, 7 のカードから少なくとも 1 枚」

と取り出される取り出し方であり, このような取り出し方は

①から 1 枚取り出すのが, ${}_3C_1 \times {}_3C_3 = 3$ 通り

①から 2 枚取り出すのが, ${}_3C_2 \times {}_3C_2 = 9$ 通り

①から 3 枚取り出すのが, ${}_3C_3 \times {}_3C_1 = 3$ 通り

より, 合わせて

$$3 + 9 + 3 = 15 \text{ 通り}$$

となる.

これより求める確率は

(Xが偶数となる確率) − (Xが偶数だが 6 の倍数とならない確率)

$$= \frac{121}{126} - \frac{15}{126} = \frac{106}{126} = \frac{53}{63}$$

である.

$\boxed{5}$

(1) 直線ABの方程式は $y=-\dfrac{2}{3}x+2$ であるから，

$$\mathrm{P}\left(t,\ 2-\frac{2}{3}t\right)\qquad \text{ただし，}0\leqq t<3$$

とおける．このとき，$\mathrm{H}(t,\ 0)$，$\mathrm{M}\left(\dfrac{3+t}{2},\ 0\right)$ であり (図1)，

$$\mathrm{OP}^2=t^2+\left(2-\frac{2}{3}t\right)^2=\frac{13t^2-24t+36}{9}$$

$$\mathrm{OM}^2=\left(\frac{3+t}{2}\right)^2=\frac{t^2+6t+9}{4}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2-\mathrm{OM}^2&=\frac{1}{36}\left\{4(13t^2-24t+36)-9(t^2+6t+9)\right\}\\&=\frac{1}{36}(43t^2-150t+63)\\&=\frac{1}{36}(t-3)(43t-21)\end{aligned}$$

となるので，$t-3<0$ を考慮して

$$0\leqq t\leqq\frac{21}{43}\ \text{で}\ \mathrm{OM}\leqq\mathrm{OP},\qquad \frac{21}{43}\leqq t<3\ \text{で}\ \mathrm{OP}\leqq\mathrm{OM}$$

となる．

△OPMをOを中心に回転させてできる円の半径 r とすると，r は線分PM上でOから最も離れた点とOとの距離である．よって，r はOP，OMのいずれか小さくない方と一致するので，円の面積 $S=\pi r^2$ は上の結果を用いて次のように分類される (図2)．

(i) $0\leqq t\leqq\dfrac{21}{43}$ のとき，$r=\mathrm{OP}$ であり，

$$S=\frac{\pi}{9}(13t^2-24t+36)=f(t)$$

$f(t)$ は，t の2次関数でグラフの軸は $t=\dfrac{12}{13}>\dfrac{21}{43}$ であるから，$t=\dfrac{21}{43}$ で最小となる．

(ii) $\dfrac{21}{43}\leqq t<3$ のとき，$r=\mathrm{OM}$ であり，

$$S=\frac{\pi}{4}(t+3)^2=g(t)$$

$g(t)$ は，t の2次関数でグラフの軸は $t=-3<\dfrac{21}{43}$ であるから，$t=\dfrac{21}{43}$ で最小となる．

(i)，(ii) より，$0\leqq t<3$ において S は $t=\dfrac{21}{43}$ で最小となる．このときのPの y 座標も求めて

$$\mathrm{P}\left(\frac{21}{43},\ \frac{72}{43}\right)\qquad\cdots\cdots\ (\text{答})$$

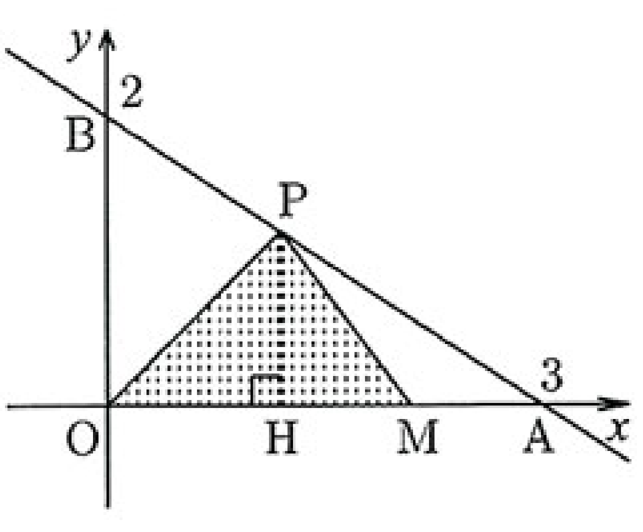


図1

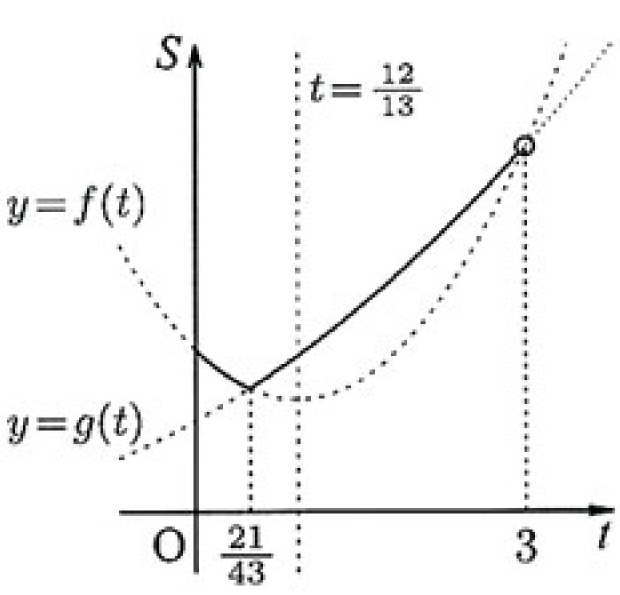


図2

$\boxed{6}$

(1) $1 \leqq k \leqq n$ に対して

$$ {}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \quad \cdots\cdots ① $$

l を $0 \leqq l \leqq k-1$ の整数として

$$ \frac{n-l}{k-l} - \frac{n}{k} = \frac{k(n-l)-n(k-l)}{k(k-l)} = \frac{l(n-k)}{k(k-l)} \geqq 0 \quad \cdots\cdots \text{等号成立は } k=n \text{ のみ} $$

よって，①より

$$ {}_n\mathrm{C}_k = \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdots\cdots\frac{n-k+1}{1} \geqq \frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k}\cdots\cdots\frac{n}{k} = \left(\frac{n}{k}\right)^k \quad \cdots\cdots ② $$

次に

$$ \begin{aligned} {}_n\mathrm{C}_k \div \frac{n^k}{2^{k-1}} &= \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdots\cdots\frac{n-k+1}{1} \div \frac{n^k}{2^{k-1}} \\ &= \left(\frac{n}{k}\cdot\frac{2}{n}\right)\left(\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{2}{n}\right)\left(\frac{n-2}{k-2}\cdot\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(\frac{n-k+2}{2}\cdot\frac{2}{n}\right)\left(\frac{n-k+1}{1}\cdot\frac{1}{n}\right) \\ &= \left(\frac{n}{n}\cdot\frac{2}{k}\right)\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{2}{k-1}\right)\left(\frac{n-2}{n}\cdot\frac{2}{k-2}\right)\cdots\left(\frac{n-k+2}{n}\cdot\frac{2}{2}\right)\left(\frac{n-k+1}{n}\cdot\frac{1}{1}\right) \\ &\leqq 1 \end{aligned} $$

よって，　$ {}_n\mathrm{C}_k \leqq \dfrac{n^k}{2^{k-1}} $ $\cdots\cdots$ ③

②, ③より，

$$ \left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \frac{n^k}{2^{k-1}} \quad \cdots\cdots \text{(終わり)} $$

(2) (1)の結果を利用して

$$ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k < \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = 2^n $$

よって，

$$ \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k < 1 \quad \cdots\cdots \text{(終わり)} $$

(3) ③の両辺を n^k で割ることにより，${}_n\mathrm{C}_k\left(\dfrac{1}{n}\right)^k < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$ となるから

$$ \begin{aligned} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &< 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \\ &< 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} \\ &= 3 \end{aligned} \quad \cdots\cdots \text{(終わり)} $$

(注)

二項定理

$$ (a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b^1 + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n $$

において，$a=b=1$ を代入すると

$$ {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n $$

を得る．

$\boxed{7}$ $a>0,\quad k>0$

(1) 平行移動しても x^2 の係数は変化しないことと、原点を通ることから、b を定数として

$C_1\ :\ y=\dfrac{a}{2}x^2+bx$ とおくことができる.

$y'=ax+b$ より, $x=0$ における接線の傾きは b

$y=kx$ に接するので, $b=k$

よって, $C_1\ :\ y=\dfrac{a}{2}x^2+kx$

同様に, $C_2\ :\ y=-\dfrac{2}{a}x^2+kx$

l の方程式は, $y=-\dfrac{1}{k}x$

C_1 と l の交点は, $\dfrac{a}{2}x^2+kx=-\dfrac{1}{k}x \iff x\left(\dfrac{a}{2}x+k+\dfrac{1}{k}\right)=0$

よって, $x=0,-\dfrac{2}{a}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)$

C_2 と l の交点は, $-\dfrac{2}{a}x^2+kx=-\dfrac{1}{k}x \iff x\left(\dfrac{2}{a}x-k-\dfrac{1}{k}\right)=0$

よって, $x=0,\dfrac{a}{2}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)$

$\alpha=-\dfrac{2}{a}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)$, $\beta=\dfrac{a}{2}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)$ とおく.

$$\begin{aligned}
S_1+S_2&=\int_\alpha^0\left\{-\frac{1}{k}x-\left(\frac{a}{2}x^2+kx\right)\right\}dx+\int_0^\beta\left\{\left(-\frac{2}{a}x^2+kx\right)+\frac{1}{k}x\right\}dx\\
&=-\frac{a}{2}\int_\alpha^0 x(x-\alpha)\,dx-\frac{2}{a}\int_0^\beta x(x-\beta)\,dx\\
&=-\frac{1}{6}\left(-\frac{a}{2}\right)(0-\alpha)^3-\frac{1}{6}\left(-\frac{2}{a}\right)(\beta-0)^3\\
&=\frac{a}{12}\left(\frac{2}{a}\right)^3\left(k+\frac{1}{k}\right)^3+\frac{1}{3a}\left(\frac{a}{2}\right)^3\left(k+\frac{1}{k}\right)^3\\
&=\left(k+\frac{1}{k}\right)^3\left(\frac{2}{3a^2}+\frac{a^2}{24}\right)
\end{aligned}$$

…… (答)

(2) $k=\sqrt{2}-1$ のとき,

$k+\dfrac{1}{k}=(\sqrt{2}-1)+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1=2\sqrt{2}$

$$S=(2\sqrt{2})^3\left(\frac{2}{3a^2}+\frac{a^2}{24}\right)$$

相加平均・相乗平均より

$$S\geqq(2\sqrt{2})^3\cdot 2\sqrt{\frac{2}{3a^2}\cdot\frac{a^2}{24}}=16\sqrt{2}\cdot\frac{2}{6}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$$

等号成立は,

$$\frac{2}{3a^2}=\frac{a^2}{24}\iff a^4=\frac{2}{3}\cdot 24=16\qquad\therefore\quad a=2$$

…… (答)

$\boxed{8}$

1から9のカードの9枚の中から4枚を取り出すとき, その取り出し方は,

$${}_9\mathrm{C}_4 = 126 \text{通り}$$

であり, これらは同様に確からしい.

(1) Xが5の倍数となるとき, 取り出された4枚の中に5のカードが含まれていればよく, そのような取り出し方は, 5以外の8枚のカードから3枚を取り出したときの取り出し方と一致するので,

$${}_8\mathrm{C}_3 = 56 \text{通り}$$

である. よって, Xが5の倍数となる確率は,

$$\frac{56}{126} = \frac{4}{9}$$

である.

(2) Xが12の倍数とならない取り出し方を考える.

(i) 6のカードが含まれるような場合は, 残りの3枚が奇数 $(1, 3, 5, 7, 9)$ の中から取り出されればよいので, そのような取り出し方は,

$${}_5\mathrm{C}_3 = 10 \text{通り}$$

である.

(ii) 6のカードが含まれないような場合については,

(ア) 3と9のカードがともに含まれる場合は, 残りの2枚が2と, 3, 9以外の奇数である1, 5, 7の中から取り出されればよいので,

$${}_4\mathrm{C}_2 = 6 \text{通り}$$

(イ) 3と9のうちのどちらか片方のみが含まれる場合は, 残りの3枚が2と1, 5, 7の中から取り出されればよく, このような取り出し方は,

$$2 \times {}_4\mathrm{C}_3 = 8 \text{通り}$$

(ウ) 3と9のカードがともに含まれない場合は, 3, 6, 9以外の6枚の中から4枚を取り出せばよいので,

$${}_6\mathrm{C}_4 = 15 \text{通り}$$

(ア), (イ), (ウ) より,

$$6 + 8 + 15 = 29 \text{通り}$$

である.

これより, Xが12の倍数とならない取り出し方は,

$$29 + 10 = 39 \text{通り}$$

となるので, Xが12の倍数となる確率は,

$$1 - \frac{39}{126} = \frac{29}{42}$$

である.

(3) Xが平方数となるためには, 取り出された4枚が5, 7以外である必要がある.

(i) 取り出された4枚に3, 6, 9がすべて含まれる場合, Xが平方数となるときは, 残りの1枚が2か8であればよいので, そのような取り出し方は,

2通り

(ii) 取り出された4枚に3, 6, 9のうちの2枚が含まれる場合, Xが平方数となるときは, その2枚が3, 6であり, 残りの2枚が

$$(1, 2), (1, 8), (2, 4), (4, 8)$$

となる場合であるので, 取り出し方は

4通り

(iii) 取り出された4枚に3, 6, 9のうちの1枚だけが含まれる場合, Xが平方数となるのは, 9が含まれているときに限られ, さらに, 残りの3枚が

$$(1, 2, 8), (2, 4, 8)$$

となる場合であるので, 取り出し方は

2通り

(iv) 取り出された4枚に3, 6, 9のいずれも含まれないで, Xが平方数となるのは,

$$(1, 2, 4, 8)$$

が取り出される場合なので, 取り出し方は

1通り

以上より, Xが平方数となる取り出し方は,

$$2 + 4 + 2 + 1 = 9 \text{通り}$$

となり, Xが平方数となる確率は,

$$\frac{9}{126} = \frac{1}{14}$$

である.

$\boxed{9}$

(1) $x>0$ において条件 $f(x) \geqq g(x)$ は

$$\frac{1}{x} \geqq e^{-ax+b} \iff xe^{-ax+b} \leqq 1$$

x	(0)		$\frac{1}{a}$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$
$h(x)$		↗		↘

となる．ここで $h(x)=xe^{-ax+b}$ とおくと，

$$h'(x)=(1-ax)e^{-ax+b}$$

より，$h(x)$ は右表のように増減し，$x=\frac{1}{a}$ で最大値をとる．

$x>0$ で常に $h(x)>0$ となる条件を求めればよいので

$$h\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}e^{-1+b} \leqq 1$$

すなわち　$a \geqq e^{b-1}$ ……(答)

(2) $f(x)=\frac{1}{x}$，$g(x)=e^{-ax+b}$ について

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2},\quad g'(x)=-ae^{-ax+b}$$

(i) $y=g(x)$ が点 $(1,\ 1)$ で $y=f(x)$ に接する条件は

$$g(1)=1 \text{ かつ } g'(1)=f'(1) \qquad \therefore\ e^{-a+b}=1 \text{ かつ } -ae^{-a+b}=-1$$

この２式を辺々割ることにより

$$-a=-1 \text{ かつ } e^{-a+b}=1,\quad \text{よって，} (a,\ e^b)=(1,\ e)$$

(ii) $y=g(x)$ が点 $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$ で $y=f(x)$ に接する条件は

$$g(2)=\frac{1}{2} \text{ かつ } g'(2)=f'(2) \qquad \therefore\ e^{-2a+b}=\frac{1}{2} \text{ かつ } -ae^{-2a+b}=-\frac{1}{4}$$

この２式を辺々割ることにより

$$-a=-\frac{1}{2} \text{ かつ } e^{-2a+b}=\frac{1}{2},\quad \text{よって，} (a,\ e^b)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{e}{2}\right)$$

$g(x)=e^b\cdot e^{-ax}$ だから，(i)，(ii) より，

$$g_1(x)=e^{-x+1},\quad g_2(x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}+1}$$

となる．$y=g_1(x)$ と $y=g_2(x)$ とを連立すると

$$e^{-x+1}=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}+1} \iff 2=e^{\frac{x}{2}} \iff x=2\log 2$$

このとき $g_2(x)=\frac{1}{2}\cdot 2^{-1}\cdot e=\frac{e}{4}$ だから，交点は

$$\left(2\log 2,\ \frac{e}{4}\right)$$ ……(答)

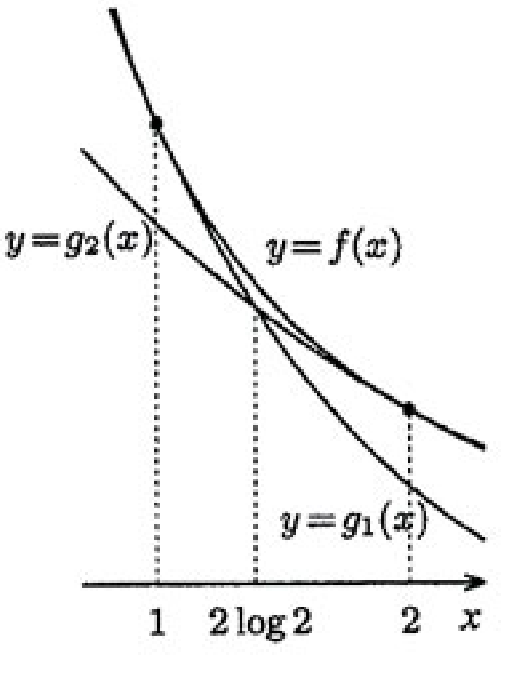
(3) $g_1(x)$，$g_2(x)$ ともに a と b は (1) の条件を満たすので，$x>0$ において常に

$$f(x) \geqq g_1(x),\quad f(x) \geqq g_2(x)$$

が成り立つ．また

$$g_1(x) \geqq g_2(x) \iff 2 \geqq e^{\frac{x}{2}} \iff x \leqq 2\log 2$$

であるので，３つのグラフは右図のようになる．



ここで $\alpha=2\log 2$ とおくと $e^{\frac{\alpha}{2}}=2$，$e^\alpha=4$ で，

$$S_1=\int_1^2 f(x)\,dx=\Big[\log x\Big]_1^2=\log 2$$

$$S_2=\int_1^\alpha g_1(x)\,dx=\Big[-e^{-x+1}\Big]_1^\alpha=-e^{1-\alpha}+1=1-\frac{e}{4}$$

$$S_3=\int_\alpha^2 g_2(x)\,dx=\Big[-e^{-\frac{x}{2}+1}\Big]_\alpha^2=-1+e^{-\frac{\alpha}{2}+1}=\frac{e}{2}-1$$

となるので，３つの曲線で囲まれる図形の面積は

$$S_1-(S_2+S_3)=\log 2-\frac{e}{4}$$ ……(答)

$\boxed{10}$

(1) 与えられた定積分において，$x=\tan^3\theta$ と置換すると

x	$1 \to 3\sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{4} \to \frac{\pi}{3}$

$$dx = 3\tan^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = 3\tan^2\theta(1+\tan^2\theta)\,d\theta$$

となるので，

$$\int_1^{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\tan^2\theta}-\frac{1}{1+\tan^2\theta}\right)\cdot 3\tan^2\theta(1+\tan^2\theta)\,d\theta$$

$$= 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left\{(1+\tan^2\theta)-\tan^2\theta\right\}d\theta$$

$$= 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta = 3\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 3\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$ ……（答）

(2) $t>1$ に対して $t=\tan^3 p$ $\left(\frac{\pi}{4}<p<\frac{\pi}{2}\right)$ とおく．

$g(t)$ として定められた定積分において $x=\tan\theta$ とおくと，(1) と同様にして

$$g(t)=\int_1^t\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{p}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot 3\tan^2\theta(1+\tan^2\theta)\,d\theta$$

$$=3\int_{\frac{\pi}{4}}^{p}\tan^2\theta\,d\theta = 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{p}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)d\theta = 3\Big[\tan\theta-\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{p}$$

$$=3\left(\tan p-\tan\frac{\pi}{4}-p+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=3\left(t^{\frac{1}{3}}-1-p+\frac{\pi}{4}\right)$$

となる．よって

$$g(t)-at^b = 3t^{\frac{1}{3}}-at^b-3\left(p+1-\frac{\pi}{4}\right)$$

となるが，$t\to\infty$ のとき $p\to\frac{\pi}{2}$ であることより，$g(t)-at^b$ が収束するための条件は

「$h(t)=3t^{\frac{1}{3}}-at^b$ が収束する」

ことである．ここで次のように分類される．

(i) $0<b<\frac{1}{3}$ のとき，$h(t)=t^{\frac{1}{3}}\left(3-at^{b-\frac{1}{3}}\right)$ として，

$t\to\infty$ で　$t^{\frac{1}{3}}\to\infty$，$3-at^{b-\frac{1}{3}}\to 3$　より，$h(t)$ は発散する．

(ii) $b>\frac{1}{3}$ のとき，$h(t)=t^b\left(3t^{\frac{1}{3}-b}-a\right)$ として，

$t\to\infty$ で　$t^b\to\infty$，$3t^{\frac{1}{3}-b}-a\to -a$　より，$h(t)$ は発散する．

(iii) $b=\frac{1}{3}$ のとき，$h(t)=t^{\frac{1}{3}}(3-a)$ となり，

$t\to\infty$ で $t^{\frac{1}{3}}\to\infty$ より，$3-a\neq 0$ ならば $h(t)$ は発散する．

(i)，(ii)，(iii) より，$g(t)-at^b$ が収束する必要十分条件は

$b=\frac{1}{3}$ かつ $3-a=0$

であるから，求める a，b の値は

$a=3,\quad b=\frac{1}{3}$ ……（答）

$\boxed{11}$

(1) 5以上の素数は2の倍数でも3の倍数でもない.
一方, 5以上のすべての自然数 N は, 自然数 n を用いて,

$$6n-1,\ \ 6n,\ \ 6n+1,\ \ 6n+2,\ \ 6n+3,\ \ 6n+4$$

のいずれかの形で表すことができる.
このうち, $6n$, $6n+2$, $6n+4$ は2の倍数であり, $6n+3$ は3の倍数であるので, 5以上の素数は,

$$6n-1 \quad \text{または} \quad 6n+1$$

と表される必要がある.

(2) すべての自然数 N において, $6N-1$ は5以上の自然数となる.
また, $6N-1$ は2でも3でも割り切れないので, $6N-1$ を素因数分解したとき, 5以上の素因数が含まれる.
$6N-1$ を素因数分解したときの素数が, すべて $6k+1$ の形で表されるとき, すなわち,

$$6N-1=(6k_1+1)(6k_2+1)\cdots(6k_m+1) \quad (m\text{ は自然数}, i=1,\ 2,\ \cdots m \text{ としたとき } 6k_i+1 \text{ は素数})$$

と表されるとすると, この右辺は

$$6\times(\text{整数})+1$$

となり, 右辺が6で割ると5余る数であることと矛盾する.
したがって, $6N-1$ は $6n-1$ で表される素数を約数としてもつ.

(3) $6n-1$ で表される素数が有限個であるとする.
このとき, $6n-1$ の形となる素数の個数を l とし, これらを小さいものから並べたものを,

$$6k_1-1,\ \ 6k_2-1,\ \ \cdots,\ 6k_l-1$$

とする. $6k_l-1$ は $6n-1$ で表される素数のうちで最大の素数である.

$$T=6(6k_1-1)(6k_2-1)\cdots\cdots(6k_l-1)-1$$

とおくと,

$$T \text{ は } 6k_1-1\ ,\ 6k_2-1\ ,\ \cdots\cdots\ ,6k_l-1 \quad \text{のどの素数でも割り切れない} \quad \cdots(*)$$

一方, $T>6k_l-1$ で, T は $6N-1$ の形の自然数であるから素数ではない. よって, (2) より T は $6n-1$ の形の素数因数をもつが, これは $(*)$ に反する.

以上より, $6n-1$ の形で表される素数は無限に存在する.

$\boxed{12}$

(1) 命題「$f(x) \geqq 0 \Longrightarrow g(x) \geqq 0$」がすべての実数 x について成り立つ条件は，不等式 $f(x) \geqq 0$ の解

$$x \geqq 2 - a^2 \quad \cdots\cdots ①$$

が不等式 $g(x) \geqq 0$ の解に含まれることである．

3 次関数 $y = g(x) = x(x-a)(x-a-2)$ のグラフを考慮すると，$g(x) \geqq 0$ の解は次のようになる．

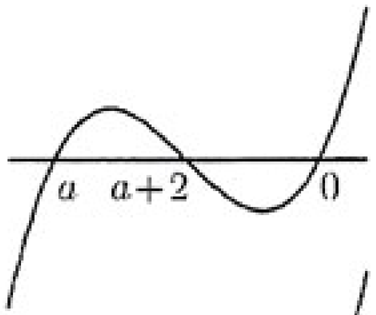
(i) $a < -2$ のとき

$a \leqq x \leqq a+2$，$0 \leqq x$

①が含まれるための条件は

$0 \leqq 2 - a^2 \iff -\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}$

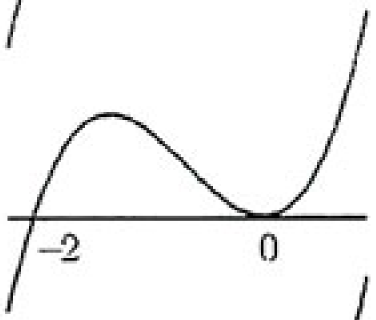
であるが，これは $a < -2$ に矛盾する．



(ii) $a = -2$ のとき

$x \geqq -2$

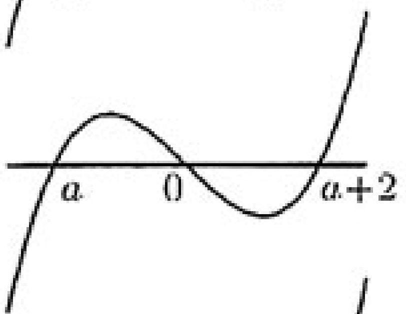
このとき①は $x \geqq -2$ となるので，含まれる．



(iii) $a > -2$ のとき

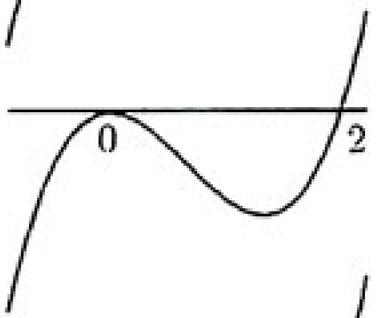
(ア) $-2 < a < 0$ のとき

$a \leqq x \leqq 0$，$a+2 \leqq x$



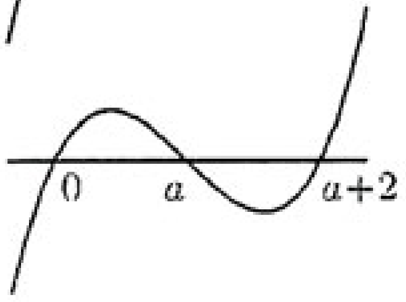
(イ) $a = 0$ のとき

$a = 0$，$2 \leqq x$



(ウ) $a > 0$ のとき

$0 \leqq x \leqq a$，$a+2 \leqq x$



となるが，これらいずれの場合も①が含まれるための条件は

$a + 2 \leqq 2 - a^2 \iff a(a+1) \leqq 0 \iff -1 \leqq a \leqq 0$

であり，これは $a > -2$ を満たす．

以上，(i)，(ii)，(iii) より

$a = -2$ または $-1 \leqq a \leqq 0$ $\cdots\cdots$ (答)

(2) 命題「$x \geqq 0 \Longrightarrow f(x) \geqq 0$ または $g(x) \geqq 0$」がすべての実数 x について成り立つ条件は，$x \geqq 0$ の範囲のすべての x の値が不等式「$f(x) \geqq 0$ または $g(x) \geqq 0$」の解に含まれることである．

(i) $a \leqq -2$ のとき，$x \geqq 0$ は $f(x) \geqq 0$ の解に含まれるので，命題は成り立つ．

(ii) $-2 < a \leqq 0$ のとき，$x \geqq 0$ は $f(x) \geqq 0$ の解に含まれない．よって「$f(x) \geqq 0$ または $g(x) \geqq 0$」の解に含まれるための条件は

$2 - a^2 \leqq 0 \iff a \leqq -\sqrt{2}$，$\sqrt{2} \leqq a$

であるが，$-2 < a \leqq 0$ より

$-2 < a \leqq -\sqrt{2}$

(iii) $a > 0$ のとき，$x \geqq 0$ は $f(x) \geqq 0$ の解に含まれない．よって「$f(x) \geqq 0$ または $g(x) \geqq 0$」の解に含まれるための条件は

$2 - a^2 \leqq a \iff (a+2)(a-1) \geqq 0 \iff a \leqq -2$，$1 \leqq a$

であるが，$a > 0$ より

$1 \leqq a$

以上，(i)，(ii)，(iii) より

$a \leqq -\sqrt{2}$ または $1 \leqq a$ $\cdots\cdots$ (答)