2010年度

高2ファーストステップ
基礎学力チェックテスト
数　学　《解答解説》

【1】

（解答）　各5点×8＝40点

(1)	$4\sqrt{35}$	(2)	$(x-1)(x^2+4x+7)$	(3)	$\left(-\frac{3}{2},\ \frac{3}{4}\right)$
(4)	$x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$	(5)	$x\leqq-\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\leqq x$	(6)	$-\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}$
(7)	$\frac{40}{243}$	(8)	$\frac{111}{16}\pi$		

（解説）

(1) 分母を有理化すると

$$x=\frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}=\sqrt{7}+\sqrt{5}$$

$$y=\frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=\sqrt{7}-\sqrt{5}$$

よって

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=2\sqrt{7}\cdot2\sqrt{5}=4\sqrt{35}$$

(2) 公式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ を用いて

$$\begin{aligned}(x+1)^3-8&=\{(x+1)-2\}\{(x+1)^2+(x+1)\cdot2+2^2\}\\&=(x-1)(x^2+4x+7)\end{aligned}$$

(3) 平方完成すると

$$y=x^2+3x+3=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

ゆえに，グラフの頂点は

$$\left(-\frac{3}{2},\ \frac{3}{4}\right)$$

(4) 2次方程式の解の公式を用いて

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot(-1)}}{2\cdot2}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$$

(5) 不等式の左辺を因数分解して

$$(2x+1)(3x-2)\geqq0$$

$$\therefore\quad x\leqq-\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\leqq x$$

(6) $\begin{cases} x-5<3(3-x) & \cdots\cdots① \\ \dfrac{7-x}{3}<\dfrac{5}{2} & \cdots\cdots② \end{cases}$

①より　$x-5<9-3x$

$\therefore\ 4x<14 \qquad \therefore\ x<\dfrac{7}{2}$

②より　$2(7-x)<15$

$\therefore\ -2x<1 \qquad \therefore\ x>-\dfrac{1}{2}$

共通範囲は　$-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{7}{2}$

(7) サイコロを 1 回投げて，2 以下の目が出る確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ である．5 回投げて 2 以下の目がちょうど 3 回出る確率は

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\frac{2^2}{3^2}=\frac{40}{243}$$

(8) 与えられた円錐の体積は

$$V=\frac{1}{3}\cdot(\pi\cdot3^2)\cdot4=12\pi$$

切断した平面より上の部分は元の円錐と相似な円錐であり，その相似比は 3 : 4 である．よって，平面より下の部分の体積は

$$V-\left(\frac{3}{4}\right)^3V=\frac{37}{64}V=\frac{37}{64}\cdot12\pi=\frac{111}{16}\pi$$

A グループ

【 2 】

（解答）　各 5 点× 6 = 30 点

(1)	$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$	(2)	$4\sqrt{2}$	(3)	$\sqrt{17}$
(4)	$\dfrac{3\sqrt{34}}{8}$	(5)	$\dfrac{5}{3\sqrt{17}}$	(6)	$\dfrac{8\sqrt{6}}{7}$

（解説）

(1) $\sin A>0$ だから

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(2) 三角形 ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$$

(3) 余弦定理により

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos A = 9 + 16 - 2\cdot3\cdot4\cdot\frac{1}{3} = 17$$

$\therefore\quad \mathrm{BC} = \sqrt{17}$

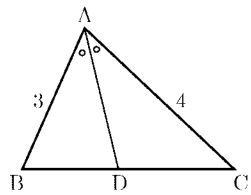
(4) 外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$R = \frac{\mathrm{BC}}{2\sin A} = \frac{\sqrt{17}}{2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3\sqrt{34}}{8}$$

(5) 余弦定理により

$$\cos B = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}} = \frac{9+17-16}{2\cdot3\cdot\sqrt{17}} = \frac{5}{3\sqrt{17}}$$

(6) AD は $\angle\mathrm{BAC}$ を 2 等分するので



$$\mathrm{BD} : \mathrm{CD} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 3 : 4$$

$\therefore\quad \mathrm{BD} = \frac{3}{3+4}\mathrm{BC} = \frac{3}{7}\sqrt{17}$

△ABD で余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BD}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cos B\\ &= 9 + \frac{153}{49} - 2\cdot3\cdot\frac{3}{7}\sqrt{17}\cdot\frac{5}{3\sqrt{17}} = \frac{384}{49}\end{aligned}$$

$\therefore\quad \mathrm{AD} = \frac{8\sqrt{6}}{7}$

【 3 】

（解答） 各 5 点× 6 = 30 点

(1)	1440 通り	(2)	144 通り	(3)	240 通り
(4)	720 通り	(5)	432 通り	(6)	432 通り

（解説）

(1) 先生の位置は，左端か右端かの 2 通りがある．生徒 6 人の並び方を別に考えて

$2\cdot6! = 1440$ (通り)

(2) まず先生と男子生徒の計 3 人を並べる (3! 通り)．その間および両端の 4 箇所に，4 人の女子生徒を 1 人ずつ並べればよい．よって

$3!\cdot4! = 144$ (通り)

(3) 先生の左右どちらの側にどの男子生徒が隣り合うかで 2 通りある．この先生と男子生徒の並びを 1 つのものとして，女子と合わせて “5 つのもの ” を並べる方法を考えて

$$2\cdot 5! = 240\ (通り)$$

(4) 先生の入る位置は定まっているので，残り 6 人の並び方を考えて

$$6! = 720\ (通り)$$

(5) (4) の場合のうち

A :「先生が中央で，先生の両隣が女子」

以外の場合である．A の場合の数は，先生の両隣の女子の並び方，およびそれ以外の生徒 4 人の並び方を考えて

$${}_4\mathrm{P}_2\cdot 4! = 4\cdot 3\cdot 4! = 288\ (通り)$$

であるから，求める場合の数は

$$720 - 288 = 432\ (通り)$$

(6) (4) の場合のうち

B :「先生が中央で，その左側あるいは右側の 3 人がすべて女子」

以外の場合である．B の場合の数は，3 人の女子の並び方 (${}_4\mathrm{P}_3$ 通り)，それが左右いずれかの側か (2 通り)，残りの生徒 3 人の並び方 (3! 通り) を考えて，

$${}_4\mathrm{P}_3\cdot 2\cdot 3! = 288\ (通り)$$

であるから，求める場合の数は

$$720 - 288 = 432\ (通り)$$

(別解) 男子 1 人，女子 2 人を選んで (${}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_2$ 通り)，左側に並べ (3! 通り)，次に，残り 3 人を右側に並べる (3! 通り) ようにすればよい．よって

$${}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_2\cdot(3!)^2 = 432\ (通り)$$

B グループ

【 2 】

(解答) 各 5 点× 6 = 30 点

(1)	$y = -\dfrac{1}{2}x + 4$	(2)	$y = 2x - 1$	(3)	中心 (1，−3)，半径 2
(4)	$3 < r < 7$	(5)	$3x + 4y + 7 = 0$	(6)	$\dfrac{8\sqrt{6}}{5}$

(解説)

(1) 2 点 A(2，3)，B(6，1) を通る直線の方程式は

$$y - 3 = \frac{1-3}{6-2}(x-2)$$

すなわち

$$y = -\frac{1}{2}x + 4 \qquad \cdots\cdots①$$

(2) 直線AB，すなわち①に垂直な直線の傾きを m とすると

$$-\frac{1}{2}\times m=-1 \qquad \therefore\quad m=2$$

よって，C(3，5) を通り①に垂直な直線の方程式は

$$y-5=2(x-3) \qquad \therefore\quad y=2x-1 \qquad \cdots\cdots②$$

(3) $$S_1 : x^2+y^2-2x+6y+6=0 \qquad \cdots\cdots③$$

を変形すると

$$S_1 : (x-1)^2+(y+3)^2=2^2$$

だから，中心は (1，−3)，半径は 2

(4) $$S_2 : x^2+y^2-8x-2y+17-r^2=0$$

を変形すると

$$S_2 : (x-4)^2+(y-1)^2=r^2$$

だから，中心は (4，1)，半径は r

よって，2 円 S_1，S_2 の中心間の距離は

$$\sqrt{(4-1)^2+\{1-(-3)\}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

であり，2 円 S_1，S_2 が異なる 2 点で交わるための条件は

(半径の差) $<$ (中心間距離) $<$ (半径の和)

なので

$$|r-2|<5<r+2$$

$$\therefore\quad -5<r-2<5 \text{ かつ } 5<r+2 \qquad \therefore\quad 3<r<7$$

(5) $r=5$ のとき S_2 は

$$S_2 : x^2+y^2-8x-2y-8=0 \qquad \cdots\cdots④$$

③－④より

$$3x+4y+7=0 \qquad \cdots\cdots⑤$$

③，④をともに満たす x，y は⑤も満たすから，⑤は S_1，S_2 の 2 交点を通る図形を表す．また，⑤は直線を表すから，直線 PQ の方程式は⑤である．

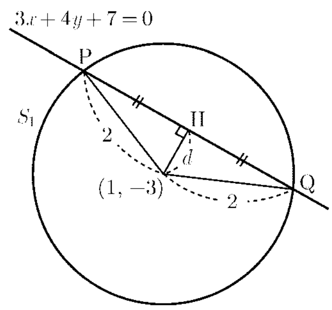
(6) 円 S_1 の中心 (1，−3) と直線⑤の距離を d とすると

$$d=\frac{|3\cdot1+4\cdot(-3)+7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{2}{5}$$

よって，図のように点 H をとると

$$\mathrm{PQ}=2\mathrm{PH}=2\sqrt{2^2-d^2}=2\sqrt{4-\left(\frac{2}{5}\right)^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{96}}{5}=\frac{8\sqrt{6}}{5}$$



【 3 】

（解答） 各 5 点× 6 = 30 点

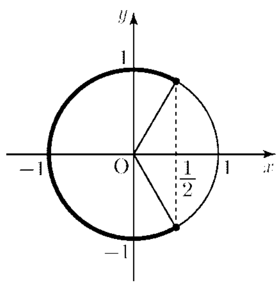
(1)	$-\dfrac{1}{2}$	(2)	$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{3}\pi$	(3)	$y = (2+\sqrt{3})x$
(4)	$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$	(5)	$t^2 - t - 1$	(6)	$1+\sqrt{2}$

（解説）

(1) $\sin\left(-\dfrac{13}{6}\pi\right) = -\sin\dfrac{13}{6}\pi = -\sin\left(2\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$

（注） $\sin\left(-\dfrac{13}{6}\pi\right) = \sin\left(-2\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{6}$ としてもよい．

(2) 単位円上で x 座標が $\dfrac{1}{2}$ 以下であるような点の表す角の範囲を求めて



$$\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{5}{3}\pi$$

(3) 直線 $y = x$ と x 軸の正方向とのなす角は 45° である．よって，直線 $y = x$ とのなす角が 30° であり，直線 $y = x$ より傾きの大きな直線は，x 軸の正方向と $45^\circ + 30^\circ$ の角をなし，その傾きは

$$\tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} = 2+\sqrt{3}$$

したがって，求める直線の方程式は

$$y = (2+\sqrt{3})x$$

（注） 求める直線の傾きを m とすると

$$\frac{m-1}{1+m \cdot 1} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \therefore \quad \sqrt{3}(m-1) = 1+m$$

これから $m = 2+\sqrt{3}$ を求めてもよい．

(4)
$$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

であるから，t のとり得る値の範囲は

$$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$$

(5) $$\sin 2x = 2\sin x\cos x = (\sin x + \cos x)^2 - (\sin^2 x + \cos^2 x) = t^2 - 1$$

であるから

$$y = \sin 2x - \sin x - \cos x = \sin 2x - (\sin x + \cos x) = (t^2 - 1) - t$$
$$= t^2 - t - 1$$

(6) (5) の結果を用いて

$$y = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

ここで，$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ であるから，$t = -\sqrt{2}$ のとき

$$(\text{最大値}) = 1 + \sqrt{2}$$