2010年度

高1ファーストステップ 基礎学力チェックテスト 数　学《解答解説》

【1】

(解答)　各5点×8＝40点

(1)	$(a-3b)(a-4b)$	(2)	$x=5$，$y=-7$	(3)	$x=-1$，4
(4)	$30-12\sqrt{6}$	(5)	$n=14$	(6)	$a=\dfrac{2S}{h}-b$
(7)	$x=3$，$y=\dfrac{42}{5}$	(8)	$\angle\mathrm{EDF}=15^\circ$		

(解説)

(1)　$a^2-7ab+12b^2=(a-3b)(a-4b)$

(2)
$$\begin{cases}\dfrac{2x+y}{3}-\dfrac{y+1}{6}=2 & \cdots\cdots①\\ 4(2x-y)+9y=5 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①の両辺を6倍し，整理すると，

$$2(2x+y)-(y+1)=12$$
$$4x+y=13 \quad \cdots\cdots①'$$

②を整理すると，

$$8x+5y=5 \quad \cdots\cdots②'$$

②′－①′×2より，

$$3y=-21 \qquad \therefore\quad y=-7$$

これを①′に代入して，

$$4x=20 \qquad \therefore\quad x=5$$

(3)
$$(x+1)^2=(2x-3)(x+1)$$
$$(2x-3)(x+1)-(x+1)^2=0$$
$$(x+1)\{(2x-3)-(x+1)\}=0$$
$$(x+1)(x-4)=0$$
$$\therefore\quad x=-1,\ 4$$

(4)
$$\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$$

より，

$$\left(3\sqrt{2}-\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2=\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2=18-12\sqrt{6}+12=30-12\sqrt{6}$$

(5) $$504=2^3\times3^2\times7$$

より,

$$\sqrt{504n}=\sqrt{2^2\times3^2\times2\times7\times n}=6\sqrt{14n}$$

よって，これを整数にする最小の自然数 n は

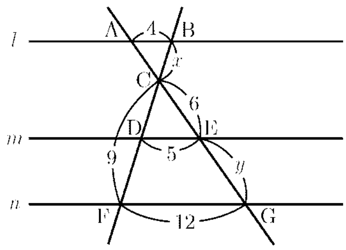
$$n=14$$

(6) $$S=\frac{(a+b)h}{2}$$

両辺に $\dfrac{2}{h}$ をかけて,

$$\frac{2S}{h}=a+b \qquad \therefore\quad a=\frac{2S}{h}-b$$

(7) $l \parallel n$ より $\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{GFC}$．よって,



$$\mathrm{AB}:\mathrm{GF}=\mathrm{BC}:\mathrm{FC}$$

$$4:12=x:9$$

$$\therefore\quad x=\frac{4\times9}{12}=3$$

また，$m\parallel n$ より $\triangle\mathrm{CDE}\backsim\triangle\mathrm{CFG}$．よって,

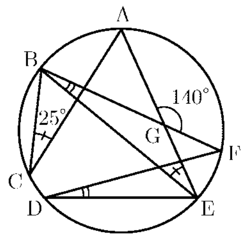
$$\mathrm{CE}:\mathrm{CG}=\mathrm{DE}:\mathrm{FG}$$

$$6:(y+6)=5:12$$

$$\therefore\quad y=\frac{6\times12}{5}-6=\frac{42}{5}$$

(8) 補助線 BE を引く．

弧 AB，弧 EF に対する円周角はそれぞれ等しいから,



$$\angle\mathrm{AEB}=\angle\mathrm{ACB}=25^\circ$$

$$\angle\mathrm{EDF}=\angle\mathrm{EBG}$$

また,

$$\angle\mathrm{BGE}=\angle\mathrm{AGF}=140^\circ$$

$\triangle\mathrm{BEG}$ の内角の和を考え,

$$\angle\mathrm{AEB}+\angle\mathrm{EBG}+\angle\mathrm{BGE}=180^\circ$$

より,

$$25^\circ+\angle\mathrm{EDF}+140^\circ=180^\circ$$

$$\therefore\quad \angle\mathrm{EDF}=15^\circ$$

Aグループ

【２】

（解答）　各５点×６＝30点

(1)	11 %	(2)	6 %	(3)	$a=\dfrac{26}{3}$
(4)	A(2，8)，B(−1，2)	(5)	(−2，0)	(6)	3 : 4

（解説）

（Ⅰ）　Aの食塩水100 g中の食塩は　$100\times\dfrac{a}{100}=a\,(\mathrm{g})$

Bの食塩水400 g中の食塩は　$400\times\dfrac{12}{100}=48\,(\mathrm{g})$

であるから，これを混ぜると，Bには$(a+48)$ gの食塩が溶けた500 gの食塩水ができ，濃度は

$$\frac{a+48}{500}\times100=\frac{a+48}{5}\,(\%) \qquad \cdots\cdots①$$

となる．この食塩水100 g中の食塩は

$$100\times\frac{\frac{a+48}{5}}{100}=\frac{a+48}{5}\,(\mathrm{g})$$

Aの容器にはa %の食塩水100 gが残っており，この中にはa gの食塩が溶けているので，BからAに100 g移すと，Aには$\left(a+\dfrac{a+48}{5}\right)$ gの食塩が溶けた200 gの食塩水ができ，濃度は

$$\frac{a+\frac{a+48}{5}}{200}\times100=\frac{5a+(a+48)}{10}=\frac{3a+24}{5}\,(\%) \qquad \cdots\cdots②$$

となる．

(1) ①で$a=7$として，　11 %

(2) ②で$a=2$として，　6 %

(3) ②より，

$$\frac{3a+24}{5}=10 \qquad \therefore\quad a=\frac{26}{3}$$

（Ⅱ）　放物線C：$y=2x^2$ ……①

直線l：$y=2x+4$ ……②

(4) ①，②を連立，yを消去して，

$$2x^2=2x+4$$
$$x^2-x-2=0$$
$$(x-2)(x+1)=0$$
$$\therefore\quad x=2,\ -1$$

これをそれぞれ②に代入し y の値を求めて，

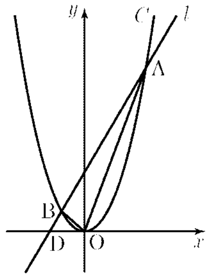
$$A(2,\ 8),\ B(-1,\ 2)$$

(5) ②に $y=0$ を代入すると，

$$x=-2 \qquad \therefore\quad D(-2,\ 0)$$

(6)

$$\begin{aligned}\triangle AOB:\triangle AOD &= AB:AD\\ &=(\text{A，B の } y \text{ 座標の差}):(\text{A，D の } y \text{ 座標の差})\\ &=(8-2):(8-0)\\ &=3:4\end{aligned}$$



【３】

（解答）　各５点×６＝30点

(1)	8	(2)	$2\sqrt{34}$	(3)	$\dfrac{6\sqrt{34}}{17}$
(4)	$\dfrac{1}{6}$	(5)	$\dfrac{7}{72}$	(6)	$\dfrac{5}{54}$

（解説）

（Ⅰ）

(1) $\triangle ABD$ を底面とする三角錐 $E-ABD$ と考えると，求める体積は

$$\frac{1}{3}\triangle ABD\times AE=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times4\times4\right)\times3=8$$

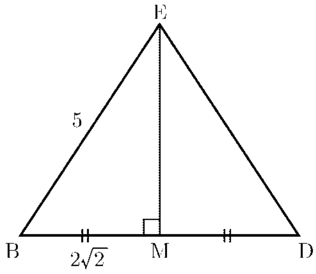
(2) 直角三角形 ABD，ABE，ADE にそれぞれ三平方の定理を用いると，

$$BD=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$$

$$BE=DE=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

$\triangle BDE$ は $BE=DE$ の二等辺三角形となるので，E から BD に下した垂線の足は BD の中点となり，これを M とすると，

$$BM=\frac{1}{2}BD=2\sqrt{2}$$



$\triangle BEM$ に三平方の定理を用いて，

$$EM=\sqrt{5^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{17}$$

よって，$\triangle BDE$ の面積は

$$\frac{1}{2}BD\times EM=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times\sqrt{17}=2\sqrt{34}$$

(3) 求める距離 d は四面体 ABDE を $\triangle BDE$ を底面とする三角錐 $A-BDE$ と考えるときの高さに相当するので，

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{BDE}\times d=(\text{四面体 ABDE の体積})$$

が成り立つ．(1)，(2) の結果を用いると，

$$\frac{1}{3}\times 2\sqrt{34}\times d=8 \qquad \therefore\quad d=\frac{12}{\sqrt{34}}=\frac{6\sqrt{34}}{17}$$

（Ⅱ） $(a,\ b,\ c)$ の組は全部で $6^3=216$ 通りあり，これらの出方は同様に確からしい．

(4) $a+b=7$ となるのは，a，b について，

$$(a,\ b)=(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)$$

の 6 通りの場合で，それぞれについて c は，$c=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ の 6 通りがあるから，求める確率は

$$\frac{6\times 6}{6^3}=\frac{1}{6}$$

(5) $a+b+c=8$ となるのは

(i) $a+b=7,\ c=1$ のとき　$(a,\ b)$ の場合の数より　6 通り

(ii) $a+b=6,\ c=2$ のとき　$(a,\ b)$ の場合の数より　5 通り

(iii) $a+b=5,\ c=3$ のとき　$(a,\ b)$ の場合の数より　4 通り

(iv) $a+b=4,\ c=4$ のとき　$(a,\ b)$ の場合の数より　3 通り

(v) $a+b=3,\ c=5$ のとき　$(a,\ b)$ の場合の数より　2 通り

(vi) $a+b=2,\ c=6$ のとき　$(a,\ b)$ の場合の数より　1 通り

なので，求める確率は

$$\frac{6+5+4+3+2+1}{216}=\frac{7}{72}$$

(別解)　和が 8 になる 3 つの目の数の組は

（ア）　$\{1,\ 1,\ 6\}$，$\{2,\ 2,\ 4\}$，$\{3,\ 3,\ 2\}$

（イ）　$\{1,\ 2,\ 5\}$，$\{1,\ 3,\ 4\}$

があり，$(a,\ b,\ c)$ の順序を考慮すると，（ア）の組はそれぞれ 3 通りずつ，（イ）の組はそれぞれ 6 通りずつがあるので，求める確率は

$$\frac{3\times 3+2\times 6}{216}=\frac{7}{72}$$

(6) $a<b<c$ となるのは

(i) $b=2$ のとき，$a=1$ の 1 通り，$c=3,\ 4,\ 5,\ 6$ の 4 通りより，

$1\times 4=4$ (通り)

(ii) $b=3$ のとき，$a=1,\ 2$ の 2 通り，$c=4,\ 5,\ 6$ の 3 通りより，

$2\times 3=6$ (通り)

(iii) $b=4$ のとき，$a=1,\ 2,\ 3$ の 3 通り，$c=5,\ 6$ の 2 通りより，

$3\times 2=6$ (通り)

(iv) $b=5$ のとき，$a=1$，2，3，4 の 4 通り，$c=6$ の 1 通りより，

$$4\times 1=4\ (\text{通り})$$

なので，求める確率は

$$\frac{4+6+6+4}{216}=\frac{5}{54}$$

(別解) 1，2，3，4，5，6 の数から異なる 3 つのもの，たとえば，$\{2,\ 6,\ 5\}$ を取り出すとき，$(a,\ b,\ c)=(2,\ 5,\ 6)$ として，$a<b<c$ の組が 1 つできる．よって，$a<b<c$ となる $(a,\ b,\ c)$ の組は 6 つの異なるものから 3 つを取り出す方法（組合せ）と等しく，

$$({}_6\mathrm{C}_3=)\ \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20\ (\text{通り})$$

よって，求める確率は

$$\frac{20}{216}=\frac{5}{54}$$

B グループ

【2】

(解答) 各 5 点× 6 = 30 点

(1)	$2<x<3$	(2)	最大値 5，最小値 1
(3)	$(a,\ -a^2+2a+1)$	(4)	$a\leqq 1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\leqq a$
(5)	$1-\sqrt{2}\leqq a\leqq 1+\sqrt{2}$	(6)	$a<-\dfrac{1}{2}$

(解説)

(1) $a=\dfrac{5}{2}$ のとき，$f(x)<0$ は

$$x^2-5x+6<0$$

となるので，

$$(x-2)(x-3)<0 \qquad \therefore\ \ 2<x<3$$

(2) $a=2$ のとき，

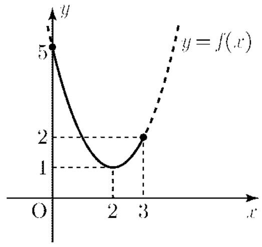
$$f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$$

となるので，$0\leqq x\leqq 3$ における $y=f(x)$ のグラフは右図のようになる．よって，$f(x)$ は

$x=0$ で最大値 5

$x=2$ で最小値 1

をとる．



(3) $$f(x)=(x-a)^2-a^2+2a+1$$

となるので，放物線 $y=f(x)$ の頂点の座標は

$$(a,\ -a^2+2a+1)$$

(4) 方程式 $f(x)=0$ は

$$x^2-2ax+2a+1=0$$

より，判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=a^2-(2a+1)=a^2-2a-1$$

となるので，方程式が実数解をもつとき，

$$a^2-2a-1\geqq 0$$

となればよい．ここで $a^2-2a-1=0$ の解は

$$a=1\pm\sqrt{2}$$

となるので，

$$a\leqq 1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\leqq a$$

（注） $f(x)=0$ が実数の解をもつとき，$y=f(x)$ と x 軸が共有点をもつので，頂点の y 座標が 0 以下となればよく，(3) より，

$$-a^2+2a+1\leqq 0$$

を解いても求められる．

(5) $$f(x)=(x-a)^2-a^2+2a+1$$

より，すべての x で $f(x)\geqq 0$ となるとき，

$$-a^2+2a+1\geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad a^2-2a-1\leqq 0$$

となればよいので，この 2 次不等式を解いて，

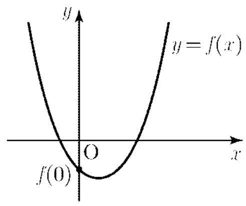
$$1-\sqrt{2}\leqq a\leqq 1+\sqrt{2}$$

（注） すべての x で $f(x)\geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフより，頂点の y 座標が 0 以上となればよいので，

$$-a^2+2a+1\geqq 0$$

を解いても求められる．

(6) $y=f(x)$ のグラフと x 軸が $x>0$ と $x<0$ でそれぞれ 1 回ずつ交わればよく，そのためには



$$f(0)<0 \quad \text{すなわち} \quad 2a+1<0$$

となればよいので，

$$a<-\frac{1}{2}$$

【３】

（解答）　各５点×６＝30点

(1)	120通り	(2)	20通り	(3)	$\dfrac{5}{21}$
(4)	$\dfrac{20}{21}$	(5)	$\dfrac{16}{21}$	(6)	$\dfrac{44}{7}$

（解説）

（Ⅰ）

(1) A，B，Cが１つずつ，Dが３つあるので，これを一列に並べるときの並べ方は，同じものを含む順列より，

$$\frac{6!}{1!1!1!3!}=6\times5\times4=120 \text{ 通り}$$

(2) Xを３つとDを３つを一列に並べ，並べられたXを左から順にA，B，Cと置き換えれば条件を満たす並べ方となる．Xを３つとDを３つを一列に並べる並べ方の総数を求めればよいので，同じものを含む順列より，

$$\frac{6!}{3!3!}=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20 \text{ 通り}$$

（Ⅱ）　７枚のカードから２枚を取り出す全取り出し方は，

$${}_7C_2=21 \text{ 通り}$$

であり，これらは同様に確からしい．

(3) ２枚とも同じ数字の書かれたカードになるのは，２枚とも２となるときと３となるときがそれぞれ１通り，２枚とも４となるのは ${}_3C_2=3$ 通りなので，

$$\frac{1+1+3}{21}=\frac{5}{21}$$

(4) 積が奇数となる取り出し方は，３が２枚取り出されるときであり，その確率は

$$\frac{1}{21}$$

である．積が偶数となる確率は，積が奇数となることの余事象の確率なので，

$$1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$$

(5) 積が偶数だが，４の倍数とならないとき，２と３のカードが１枚ずつ取り出されればよいので，その確率は

$$\frac{2\times2}{21}=\frac{4}{21}$$

この確率と積が４の倍数となる確率を合わせたものが (4) の確率となるので，求める確率は

$$\frac{20}{21}-\frac{4}{21}=\frac{16}{21}$$

(6) 2 枚のカードの数字の和と，そのようになるカードの取り出し方は下表のようになる．

2 枚の和	4	5	6	7	8
カードの数字	(2，2)	(2，3)	(3，3)，(2，4)	(3，4)	(4，4)
取り出し方	1 通り	2×2 通り	$(1+2\times3)$ 通り	2×3 通り	${}_3C_2$ 通り

これより，2 枚のカードの数字の和の期待値は

$$4 \times \frac{1}{21} + 5 \times \frac{4}{21} + 6 \times \frac{7}{21} + 7 \times \frac{6}{21} + 8 \times \frac{3}{21} = \frac{132}{21} = \frac{44}{7}$$